

dr. Timár Imre

**MŰSZAKI MECHANIKA I.
STATIKA**

Bevezetés

A mechanika a fizikának egy területe, mozgásokkal, erőkkel és összefüggésekre vonatkozó törvényszerűségekkel foglalkozik. A mechanikai mozgások rendkívül sokfélék lehetnek, ezért a vizsgált tárgy tulajdonságai szerint feloszthatjuk:

- *asztronómiára*, mely az égitestek mechanikájával,
- *műszaki mechanikára*, mely a földi testek mozgásával,
- *relativisztikus mechanikára*, mely a fénysebességgel mozgó testekkel,
- *kvantum mechanikára*, mely az atomok mozgásával foglalkozik.

A mérnöki alkalmazás szempontjából elsősorban a műszaki mechanika fontos és ez a vizsgált test halmazállapotától függően három részre osztható:

- *szilárd testek mechanikájára*, ami a szilárd testek mozgását tárgyalja,
- *folyadékok mechanikájára*, ami a folyadékok mozgásjelenségeit vizsgálja,
- *aerodinamikára*, ami a gázok mozgás- és nyomásjelenségeit írja le.

Tanulmányaink során a szilárd testek mechanikájával foglalkozunk, amit módszerei alapján két fő részre oszthatunk fel:

1. *Kinematikára*, ami a testek mozgásának térben és időben való leírását tárgyalja. Jellemzősége, hogy csak hosszúság és idő dimenziókat használ és nem foglalkozik a mozgást befolyásoló okokkal.
2. *Dinamikára*, ami szintén a testek mozgásával foglalkozik, de figyelembe veszi a mozgást létrehozó erőket is. A dinamikát további két részre bonthatjuk:
 - a.) *statikára*, amely a nyugalomban levő testekre ható erőhatásokat vizsgálja;
 - b.) *kinetikára*, amely az erők hatására mozgásban levő testekkel foglalkozik.

A szilárd testeket bizonyos körülmények között *merev testeknek* tekinthetjük, ami azt jelenti, hogy alakjukat és méretüket nem változtatják meg. Ily módon eljutunk a *merev testek statikájához*. A statika másik része a *szilárdságtan*, ami a merev testek statikájához képest nemcsak a külső erők egyensúlyával foglalkozik, hanem vizsgálja a test alakváltozásait és feszültségeit is.

A szilárdságtan az anyag viselkedése alapján felosztható még *rugalmasságtanra* és *képlékenységtanra* is. A rugalmasságtan a testek alakjának megfelelően további részekre bontható:

- *elemi szilárdságtanra*, amely a rúd alakú testekkel foglalkozik,
- *felületek szilárdságtanára*, ez a tárcsa-, lemez- és héjszerkezeteket tárgyalja,
- az *általános szilárdságtan* pedig tetszőleges alakú testekkel foglalkozik.

A gyakorlatban az egyes témakörök nem különülnek el élesen egymástól és az egyes problémák megoldásakor sokszor együttesen jelentkeznek. A mechanikai problémák megoldásához számítógépes és szerkesztő, valamint számítógépes-szerkesztő (grafoanalitikus) eljárásokat használunk.

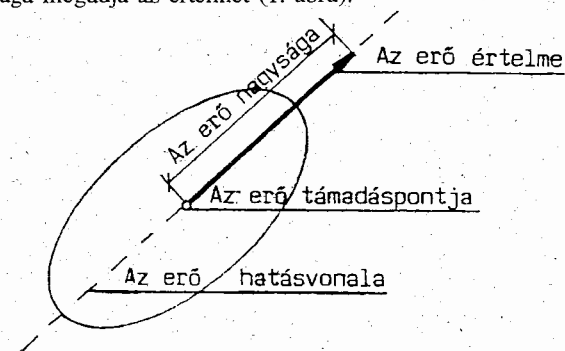
A mechanikában előforduló fizikai mennyiségek jelölésénél, mértékegységeinél az MSZ 4900 szabvány megfelelő előírásait vettük figyelembe és az 1980. január 1-től kötelező SI (System International) mértékegységeket használjuk.

1. Alapfogalmak, alaptételek

1.1. Az erő fogalma, ábrázolása

A mechanika egyik leggyakrabban használt fogalma az erő. *Erőnek* nevezzük egy testnek egy másik testre gyakorolt hatását, melynek során megváltozik vagy megváltozhat a test mozgásállapota. Két test mindig egy felület mentén érintkezik egymással, így az egymásra kifejtett erőhatás is e felület mentén adódik át. Hogyha e felület igen kicsi, akkor jó közelítéssel pontnak tekinthető és az átadott erőt koncentrált erőnek, ellenkező esetben megoszló erőnek nevezzük.

Az erő vektormennyiség, amit nagysága, hatásvonala, értelme és támadáspontja határoz meg. Az erő hatásvonalát és értelmét összefoglalóan az erő irányának is nevezzük. Az erő nagyságának mérésére a [N] vagy ennek többszöröse használatos, jelölése pedig a skalár mennyiségtől való megkülönböztetés céljából, általában vízszintes felülhúzással ellátott nagybetűt használunk, pl.: \vec{F} . Az erő támadáspontja az erő hatásvonalán fekszik és az erővektor irányítottága megadja az értelmét (1. ábra).



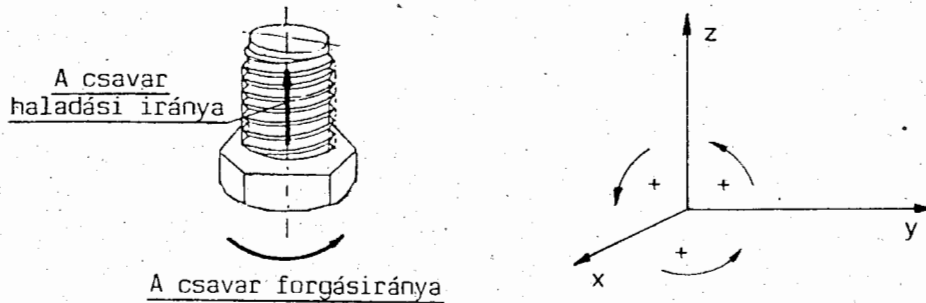
1. ábra
Az erő jellemzői

Az erő a műszaki gyakorlatban többféleképpen jelenik meg:

- koncentrált erőként, mely a test tömegének vagy felületének kis részén hat,
- vonala mentén megoszló erőként,
- felületen megoszló erőként (szél-, hőterhelés, a folyadék nyomása),
- térben megoszló erőként (tömegerők, mágneses erők stb.).

Az erők mindig párosával lépnek fel, az egyidejűleg fellépő két erő közül azonban sokszor csak az egyiket kísérik figyelemmel. *Hogyha egyidejűleg több erő hat, akkor ezt erőrendszernek nevezzük.* Amennyiben az erőrendszer erői egy síkba esnek, akkor ezt *síkbeli erőrendszernek* nevezzük, hogyha viszont az erőrendszer erőinek hatásvonalán nem lehet

közös síkot átfektetni, akkor *térbeli erőrendszerrel* van dolgunk. Bármely erő megadható a koordinátatengelyekre vett vetületeivel is. A vetületeken általában derékszögű vetületeket értünk. A műszaki mechanikában a továbbiakban olyan ún. *jobbsodrású koordinátarendszert* használunk, amit a 2. ábra alapján lehet értelmezni.



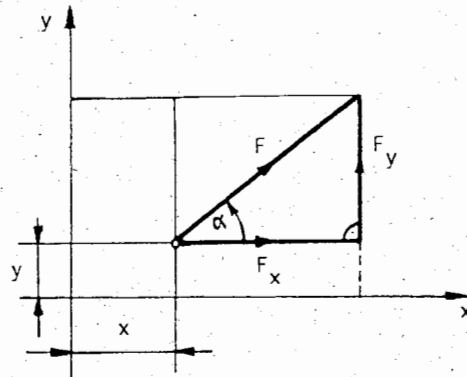
2. ábra

A jobbsodrású koordinátarendszer értelmezése

Természetesen a számítások elvégezhetők balsodrású (balos) koordinátarendszerben is (bizonyos országokban használatos), de a két rendszer keverése hibákhoz vezet.

Az erő vetülete

A síkban bármely erő felbontható tetszőleges irányú, adott esetben pedig a koordinátatengelyekkel megegyező irányú vetületekre (3. ábra).



3. ábra

Az erő felbontása koordinátatengely irányú vetületekre

A 3. ábra alapján az erő megfelelő irányú vetületeinek nagysága:

$$F_x = X = F \cos \alpha,$$

$$F_y = Y = F \sin \alpha,$$

ahol F az erő nagysága. Az ábráról látható, hogy egy síkbeli erőt négy adattal lehet megadni: x, y, α, F vagy x, y, F_x, F_y .

Az erő F_x és F_y (x és y irányú) komponensei nagyságának ismeretében meghatározható az erő nagysága:

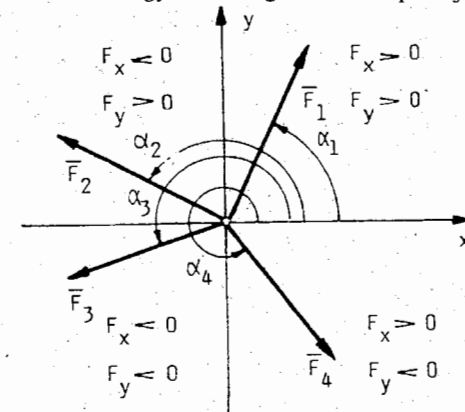
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2},$$

irányát pedig a

$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}$$

összefüggésekkel számíthatjuk. A szögfüggvények előjeléből az erő iránya egyértelműen meghatározható, de az előjeles vetületek is meghatározzák az erő irányát.

Az erő irányát két vetületének együttes vizsgálatával állapíthatjuk meg a 4. ábra szerint.



4. ábra

A térmegyedre jellemző erőkomponensek

Mivel egy síkbeli erőnek 2 darab koordinátatengely-irányú komponense van, ezért általában elmondhatjuk, hogy n erőnek $2n$ darab komponense van.

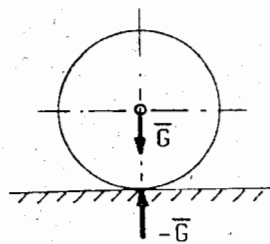
1.2. A statika alaptételei

A mechanika más természettudományokhoz hasonlóan tételeit a jelenségek megfigyeléséből vezeti le és így állítja fel egyszerűbb tételeit, melyek tovább nem egyszerűsíthetők, a tapasztalat alapján könnyen beláthatók és kísérletileg is igazolhatók. Ezeket a törvényeket alaptételeknek (axiómáknak) nevezzük. A merev testek statikáját négy ilyen axiómára építjük fel.

1.2.1. Első alaptétel

Az első alaptétel lényegében Newton III. axiómája és így hangzik:

Két egymással érintkező merev test egymásra egyenlő nagyságú, ellentétes értelmű erőhatást fejt ki (5. ábra). Ezt az akció-reakció elvének is nevezzük.



5. ábra

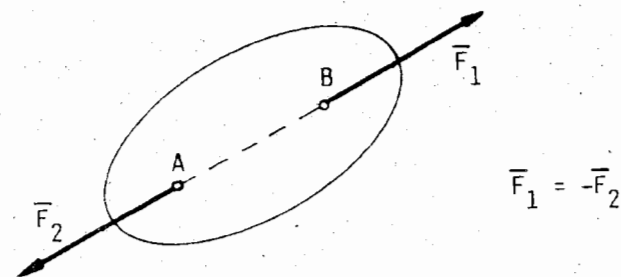
A kölcsönhatás elve

A vízszintes alapon fekvő G tömegű test erőhatást fejt ki az alapsíkra és az alap is ugyanakkora, de ellentétes irányú erőhatást fejt ki a testre. Az erők tehát párosával lépnek fel.

1.2.2. Második alaptétel

A második alaptétel olyan merev testre vonatkozik, melyre csupán két erő hat és így hangzik: *Valamely merev testre ható két erő akkor van egyensúlyban, hogyha hatásvonaluk közös, értelmük ellentétes és nagyságuk egyenlő (6. ábra). A tétel érvényes közös támadáspontú két erőre is. Ha a merev test a ráható erők hatására nyugalomban van, akkor a testre ható erők rendszere egyensúlyi erőrendszert alkot.*

Az egyensúlyban levő erőrendszer a merev testre semmiféle hatással nincs, viszont a szilárd testek alakját kisebb-nagyobb mértékben megváltoztatja. Hogyha a merev test az egyensúlyban levő erőrendszer hatása előtt nyugalomban volt, akkor az egyensúlyban levő erőrendszer hatása után is nyugalomban marad.



6. ábra

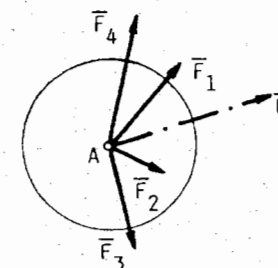
Két erő egyensúlya

1.2.3. Harmadik alaptétel

A közös támadáspontú erőrendszerre alkalmazható az erők függetlenségének elve (a szuperpozíció elve). A közös támadáspontú erőrendszer mindig helyettesíthető egy vele egyenértékű erővel. Ezt a helyettesítő erőt az erőrendszer eredőjének vagy más néven rezultánsnak nevezzük és \bar{R} betűvel is szokás jelölni.

Az erőrendszer erőit az eredő minden hatásában helyettesíti, így elmondhatjuk, hogy az erőrendszerrel az eredő egyenértékű.

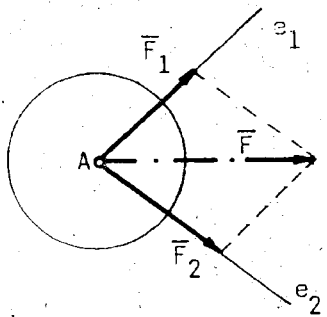
Az egyenértékűség fogalma nemcsak valamely erőrendszer és eredője között értelmezhető, hanem két erőrendszer között is. *Két erőrendszert akkor nevezünk egyenértékűnek, ha sikerül olyan harmadik erőrendszert találni, amelyik az adott két erőrendszer bármelyikével külön-külön egyensúlyi erőrendszert alkot. Az adott erők $\bar{F}_1 \dots \bar{F}_4$ az eredő összetevői, komponensei. Esetünkben az eredő erőt \bar{F} -fel jelöltük: $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$.*



7. ábra

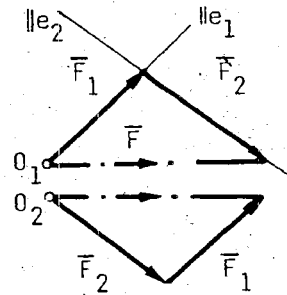
Közös támadáspontú síkbeli erőrendszer

Ennek a tételnek a legegyszerűbb alakja, amikor két erőről van szó és összegüket az ún. erőparalelogrammával és vektorháromszöggel lehet meghatározni (8. ábra):



8. ábra

Két erő eredőjének szerkesztése



A 8.b ábrán látható, hogy a vektorháromszögben az eredő a komponensek folytonos nyílfolyamával ütközik. A vektorábráról látható, hogy a vektoriális összefüggésben az összeadás sorrendje közömbös.

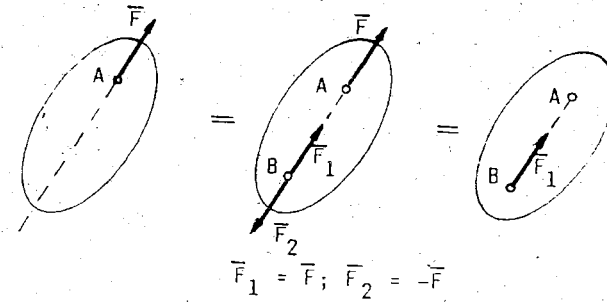
1.2.4. Negyedik alaptétel

Az első három alaptétel bármilyen szilárd testre érvényes, míg a negyedik csupán a merev testre áll fenn és így hangzik: *A merev testet támadó erőrendszer hatása nem változik meg, ha hozzá tetszőleges egyensúlyi erőrendszert adunk vagy az erőrendszerből egyensúlyban lévő erőrendszert távolítunk el.*

Ebből az alaptételből következik, hogy a merev testre ható erő hatásvonala mentén tetszőlegesen eltolható (9. ábra). Ezt az állítást a negyedik alaptétel alapján egyszerűen igazolhatjuk. A merev test A pontjában az \vec{F} erő hat, melynek hatása nem változik meg, ha hozzá a hatásvonal valamely B pontjában egyensúlyi erőrendszert adunk. Legyen ezen erőrendszer mindegyike olyan nagy, mint az \vec{F} erő, de álljon fenn az $\vec{F}_1 = \vec{F}$ és az $\vec{F}_2 = -\vec{F}$ összefüggés.

A második alaptétel szerint az \vec{F} és az \vec{F}_2 egyensúlyt tartanak, így el is távolíthatók és végeredményként a B pontban ható \vec{F}_1 erőt kapjuk, ami az A pontban ható \vec{F} erővel egyenértékű, tehát az \vec{F} erő hatásvonalán eltolható.

Az erő hatásvonalon történő eltolásának olyan feladatok megoldásánál van nagy jelentősége, amikor az erők közös síkban fekszenek, de metszéspontjuk a merev testen kívül van.



9. ábra

Az erő eltolása hatásvonala mentén

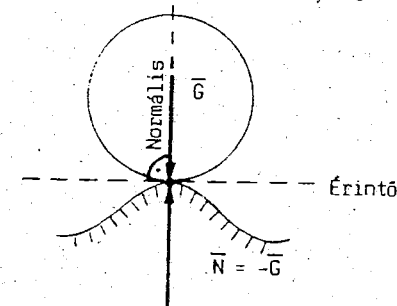
Merev testek esetében az erő támadáspontjának nincs jelentősége és a merev testek statikájában elegendő az erők hatásvonalát megadni. A szilárdságtan témakörében azonban az erő támadáspontjának is jelentősége van.

1.3. Kényszerek, megtámasztási módok

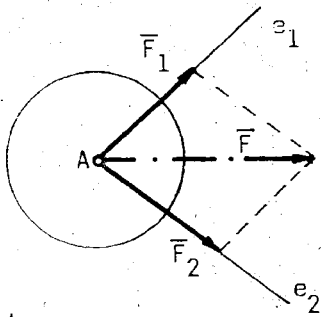
A kényszerek korlátozzák vagy megakadályozzák az általuk összekapcsolt testek egymáshoz viszonyított elmozdulásait, vagy csak bizonyos elmozdulásait. A kényszerek a ható erővel egyensúlyt tartó reakcióerőt fejtenek ki.

Támasztás

Támasztásnak nevezzük a két test között közvetlen érintkezés által létrejött kapcsolatot (10. ábra). A támasztás csak az érintkezési felületre merőleges irányú mozgást akadályozza



10. ábra
Támasztás



8. ábra

Két erő eredőjének szerkesztése

A 8.b ábrán látható, hogy a vektorháromszögben az eredő a komponensek folytonos nyírfolyamával ütközik. A vektorábráról látható, hogy a vektoriális összefüggésben az összeadás sorrendje közömbös.

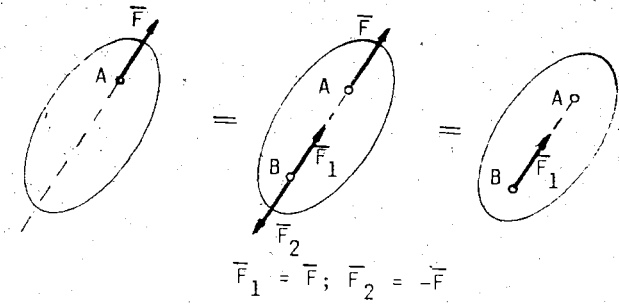
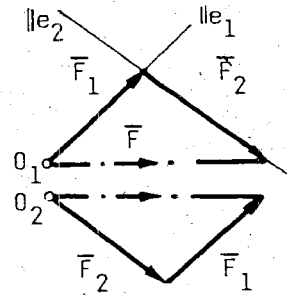
1.2.4. Negyedik alaptétel

Az első három alaptétel bármilyen szilárd testre érvényes, míg a negyedik csupán a merev testre áll fenn és így hangzik: *A merev testet támadó erőrendszer hatása nem változik meg, ha hozzá tetszőleges egyensúlyi erőrendszert adunk vagy az erőrendszerből egyensúlyban lévő erőrendszert távolítunk el.*

Ebből az alaptételből következik, hogy a merev testre ható erő hatásvonala mentén tetszőlegesen eltolható (9. ábra). Ezt az állítást a negyedik alaptétel alapján egyszerűen igazolhatjuk. A merev test A pontjában az \vec{F} erő hat, melynek hatása nem változik meg, ha hozzá a hatásvonal valamely B pontjában egyensúlyi erőrendszert adunk. Legyen ezen erőrendszer mindegyike olyan nagy, mint az \vec{F} erő, de álljon fenn az $\vec{F}_1 = \vec{F}$ és az $\vec{F}_2 = -\vec{F}$ összefüggés.

A második alaptétel szerint az \vec{F} és az \vec{F}_2 egyensúlyt tartanak, így el is távolíthatók és végeredményként a B pontban ható \vec{F}_1 erőt kapjuk, ami az A pontban ható \vec{F} erővel egyenértékű, tehát az \vec{F} erő hatásvonalán eltolható.

Az erő hatásvonalon történő eltolásának olyan feladatok megoldásánál van nagy jelentősége, amikor az erők közös síkban fekszenek, de metszéspontjuk a merev testen kívül van.



9. ábra

Az erő eltolása hatásvonala mentén.

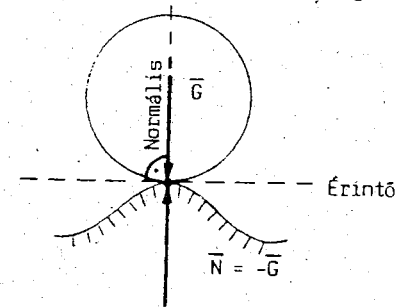
Merev testek esetében az erő támadáspontjának nincs jelentősége és a merev testek statikájában elegendő az erők hatásvonalát megadni. A szilárdságtan témakörében azonban az erő támadáspontjának is jelentősége van.

1.3. Kényszerek, megtámasztási módok

A kényszerek korlátozzák vagy megakadályozzák az általuk összekapcsolt testek egymáshoz viszonyított elmozdulásait, vagy csak bizonyos elmozdulásait. A kényszerek a ható erővel egyensúlyt tartó reakcióerőt fejtenek ki.

Támasztás

Támasztásnak nevezzük a két test között közvetlen érintkezés által létrejött kapcsolatot (10. ábra). A támasztás csak az érintkezési felületre merőleges irányú mozgást akadályozza

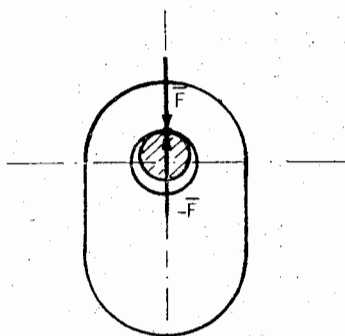


10. ábra
Támasztás

meg. Amennyiben az érintkezési felületek simák, akkor az érintkező testek a két felület közös érintő síkjába eső kis erő hatására már elmozdulnak. Az érintkezési felület nagyságától függően beszélhetünk pontszerű illetve véges felületű megtámasztásról.

Csukló

A csuklónak két típusát — a síkbeli csuklót és a térbeli (gömb-)csuklót — különböztetjük meg.



11. ábra
Síkbeli csukló

Síkbeli csuklónak nevezzük két test között hengeres csappal létrehozott kapcsolatot (11. ábra). A csap a két testben létesített, a csapnál valamivel nagyobb átmérőjű furatokban helyezkedik el és lehetővé teszi két test egymáshoz viszonyított kölcsönös elfordulását. Az erőhatásokat egyik félről a másikra a csap alkotója mentén viszi át. Az átadódó erők közös hatásvonala benne van a rajz síkjában, sugárirányban átmegey a csap középpontján.

Mivel a későbbiekben síkbeli erőrendszerekkel foglalkozunk, ezért a gömbcsukló sajátosságaira nem térünk ki.

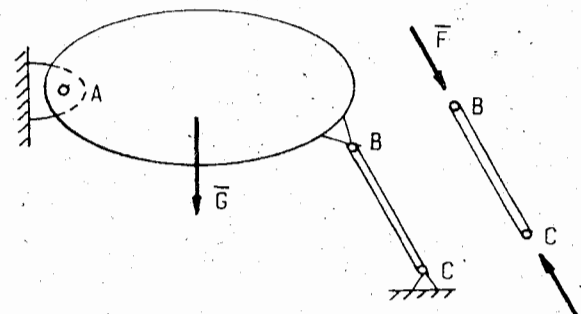
Kötél

A műszaki gyakorlatban kényszerként nagyon gyakran alkalmazunk kötelet, amit sokszor súlytalanoknak, nyújthatatlannak és tökéletesen hajlékonynak tekintünk, a *kötél* tehát sem a nyomásnak, sem a hajlításnak nem áll ellen és *csak húzóerőt képes felvenni*.

A reakcióerő hatásvonala és értelme ebben az esetben meghatározott éppen úgy, mint teljesen sima megtámasztás esetén.

Rúd

Statikailag határozott megfogású (statikai) rúdnak nevezzük azt a kényszert, amelyik mindkét végén csuklóval kapcsolódik valamilyen testhez és *csak a csuklóban* vesz fel erőhatást (12. ábra).



12. ábra
Egyenes rúd

A statikai rúd az általa összekapcsolt két test között olyan rúderő átadására képes, melynek hatásvonala a két csukló középpontját összekötő egyenes. Igénybevétele annyiban tér el a kötélétől, hogy *húzással is és nyomással is terhelhető*.

Az ábrán látható rúd igénybevétele nyomás, és mivel a rúd mindkét végén csuklósan kapcsolódik, ezért csak rúdirányú erő (\bar{F}) terheli.

1.4. Közös ponton átmenő síkbeli erők

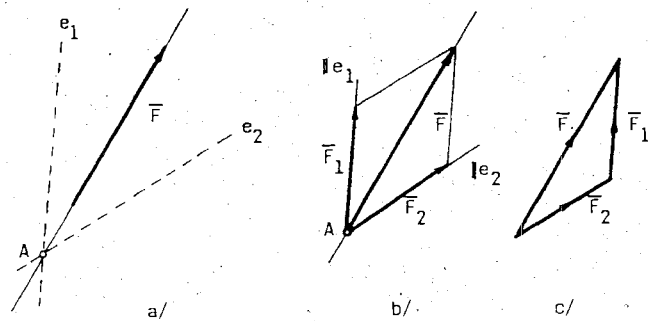
1.4.1. Az erő komponensekre bontása szerkesztéssel

Az erő komponensekre bontása a gyakorlatban úgy jelentkezik, hogy egy adott nagyságú erőt fel kell bontani két ismert hatásvonalú erőre, melyek közös pontban metsződnek (13. ábra).

A feladatot megoldhatjuk erőparalelogrammával és vektorháromszög segítségével. Az adott \bar{F} erőt a tanultak értelmében hatásvonalán eltoljuk a két ismert hatásvonal (e_1 , e_2) metszéspontjába. Utána az erővektor végpontjából a két ismert hatásvonalal párhuzamosokat húzunk és ezek kimetszik az \bar{F} erő két komponensét, az e_1 hatásvonalon az \bar{F}_1 -et és az e_2 hatásvonalon az \bar{F}_2 -t (13.b ábra). A szerkesztést vektorháromszöggel (13.c ábra) úgy végezhetjük el, hogy az \bar{F} erő kezdő- és végpontjából a két összetevő hatásvonalával párhuzamos egyeneseket húzunk és metszéspontjuk megadja az erőkomponenseket. Látható, hogy a vektorháromszögben *az összetevők nyílfolyama ütközik az \bar{F} erővel*.

Az előbbi probléma a statika leggyakoribb feladatai közé tartozik és az erő komponensekre bontásának nevezzük. Amennyiben a két adott hatásvonal, melyre egy ismert nagyságú

gú erőt fel kell bontani, egymásra merőleges, akkor merőleges összetevőkre bontással állunk szemben.



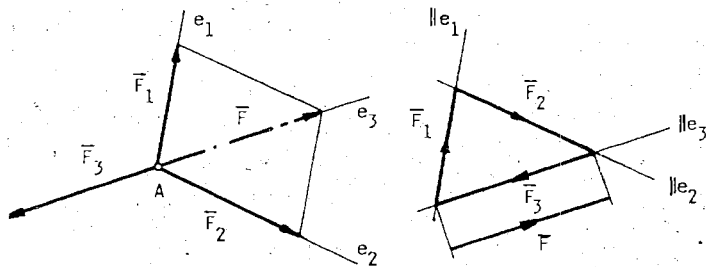
13. ábra

Az erő komponensekre bontása

1.4.2. Három erő egyensúlya

Három erő egyensúlyának vizsgálatát a legegyszerűbben úgy végezhetjük el, hogy a problémát visszavezetjük két erő egyensúlyára. Ebből a célból meg kell határozni két erő eredőjét, ami azonban csak akkor végezhető el, ha hatásvonaluk metszi egymást, vagyis közös síkban vannak (14. ábra). Szerkesztük meg az \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erők eredőjét, az \vec{F} -et, amivel az \vec{F}_3 erő a második alaptétel értelmében csak akkor van egyensúlyban, hogyha a két hatásvonal egybeesik, az \vec{F} és \vec{F}_3 egyenlő nagyságú, de értelmük ellentétes.

A szerkesztést elvégeztük erőháromszöggel is (14.b ábra). Látható, hogy három erő egyensúlya esetén a vektorháromszögben az erők nyílfolyma folytonos, ellentétben az erők komponensekre bontásával. Az eredmények alapján megfogalmazhatjuk, hogy három erő akkor van egyensúlyban, hogyha:

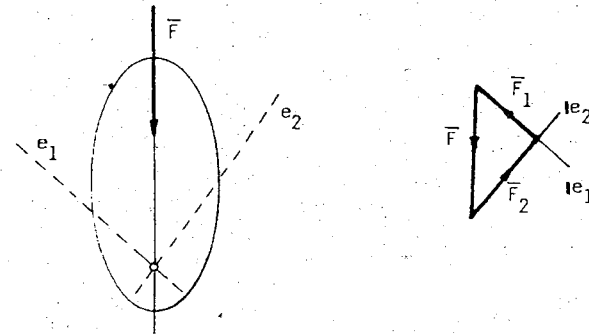


14. ábra

Három erő egyensúlya

1. a három erő közös síkba esik,
2. a három erő hatásvonalára közös pontban metsződik,
3. a három erő eredője zérus nagyságú, vagyis az erők vektorából képzett vektorháromszög záródik.

A következőkben vizsgáljunk meg egy olyan feladatot, ami visszavezethető három erő egyensúlyára. Ismeretes egy merev testre ható \vec{F} erő, amit egyensúlyozni kell két ismert hatásvonalú (e_1, e_2) erővel (15. ábra).



15. ábra

Egy erő egyensúlyozása két ismert hatásvonalú erővel

A három erő hatására a testnek nyugalomban kell lennie, ezért teljesülni kell mindhárom nyugalmi feltételnek, vagyis az erőknek egy síkba kell esni, hatásvonalukat nem lehet tetszőlegesen megadni, hanem azoknak egy pontban kell metsződniük, mégpedig az adott \vec{F} erő hatásvonalán és a három erőből (F, F_1, F_2) szerkesztett vektorháromszög folytonos nyílfolym mellett alkot egyensúlyi erőrendszert.

Az előzőekben meghatároztuk három erő egyensúlyát szerkesztéssel. Természetesen ugyanerre az eredményre kell jutnunk, hogyha ezt számítással végezzük el. Az egyszerűség kedvéért helyezzük el az $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ erőkből álló erőrendszer metszéspontjába a koordináta-rendszert (16. ábra). Minden egyes erőt jellemezzük a nagyságával (F_1, F_2, F_3) és az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ szögével.

Az erőrendszer erőit felbontjuk komponenseire.

Az F_1 erő komponensei:

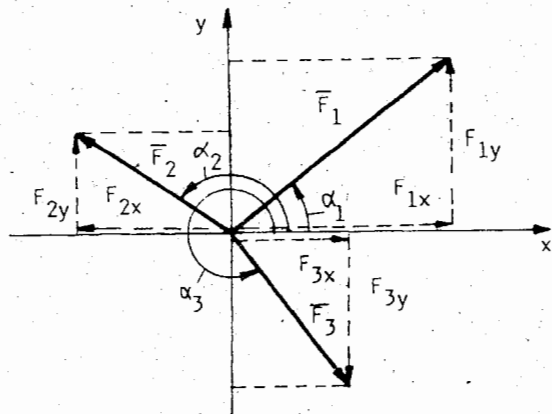
$$F_{1x} = X_1 = F_1 \cos \alpha_1; \quad F_{1y} = Y_1 = F_1 \sin \alpha_1.$$

Az F_2 erő komponensei:

$$F_{2x} = X_2 = F_2 \cos \alpha_2; \quad F_{2y} = Y_2 = F_2 \sin \alpha_2.$$

Az F_3 erő komponensei:

$$F_{3x} = X_3 = F_3 \cos \alpha_3; \quad F_{3y} = Y_3 = F_3 \sin \alpha_3.$$



16. ábra

Három erő felbontása merőleges komponensekre

Ily módon a három erőt helyettesítettük a hat darab komponensével. Mivel a szögek tartalmaznak a megfelelő ténnyedekben az érvényes előjelet, ezért az x és y irányba eső eredőt ($R_x=X$; $R_y=Y$) egyszerű algebrai összefüggéssel határozhatjuk meg:

$$X = \sum_{i=1}^3 X_i = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3,$$

$$Y = \sum_{i=1}^3 Y_i = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3.$$

Az *eredő komponenseinek* ismeretében számítható az eredő nagysága és állásszöge:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}.$$

Az X és Y előjeles mennyiségek, előjelüket az dönti el, hogy az α szög melyik ténnyedbe esik. Amennyiben a három erő egyensúlyi erőrendszert alkot, akkor az eredő (R) zérus.

1.5. Az erőrendszer egyensúlyának feltételei

Az előbbieken láttuk három, közös ponton átmenő erőrendszer egyensúlyának feltételét. Az erők vektorháromszögéből kitűnik, hogy egyensúly esetén az erőrendszer eredője zérus, vagyis

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0.$$

Az eredő tehát csak akkor lehet zérus, ha a gyök alatt lévő két pozitív tag mindegyike zérus, azaz

$$1. X = \sum X_i = 0,$$

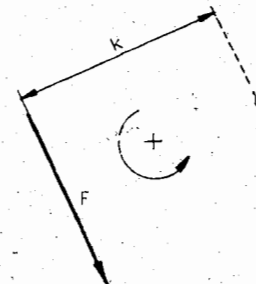
$$2. Y = \sum Y_i = 0,$$

Ennek alapján kimondhatjuk az egyensúly feltételét: közös ponton átmenő síkbeli erőrendszer egyensúlyban van, hogyha komponenseik összege külön-külön zérus.

Látható, hogy valamely közös ponton átmenő síkbeli erőrendszer egyensúlyát két egyenlet fejezi ki, ami azt is jelenti, hogy a vektorháromszögnek két egyenlet felel meg; tehát elmondhatjuk, hogy vektorsokszög szerkesztéssel csak olyan feladatokat oldhatunk meg, ahol az ismeretlenek száma legfeljebb kettő.

1.6. Az erő statikai nyomatéka

Az erő statikai nyomatékát valamely O ponton átmenő tengelyre úgy számítjuk ki, hogy az erő nagyságát (F) megszorozzuk a forgástengely és az erő hatásvonala közti merőleges távolsággal, másnéven az erő „ k ” karjával (17. ábra):



17. ábra

Az erő statikai nyomatéka

Az eredményből látható, hogy az erőnek a tengelyre számított (forgató)nyomatéka függ:

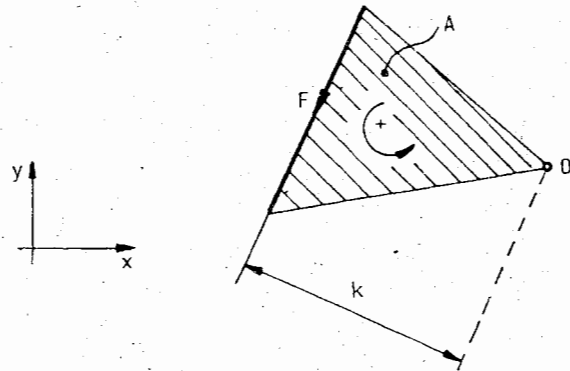
1. az erő nagyságától és
2. az erőnek a forgástengelytől márt merőleges távolságától.

Az erő tengelyre számított forgatónyomatékát az erő tengelyre számított statikai nyomatékának, vagy az erő tengelyre számított elsőrendű nyomatékának, vagy röviden tengelyre számított nyomatékának nevezzük. Jelölésére az M betűt használjuk, nagyságát pedig $[Nm]$ -ben mérjük.

A statikában az erőnek a tengelyre számított nyomatékán kívül előfordul az erőnek pontra számított nyomatéka is. A tengelyre számított nyomaték skaláris mennyiség, a pontra számított pedig vektormennyiség. Az erő tengely körüli forgatónyomatékának határozott

értelme van, forgathat az óramutató járásával megegyező, illetve azzal ellentétes irányban, ezért előjellel látjuk el.

Valamely erő statikai nyomatékát szemléletesen ábrázolhatjuk is (18. ábra), hogyha az F erőt erőléptékben a k távolságot pedig hosszléptékben ábrázoljuk. Ekkor ugyanis a srafózott háromszög területének (A) kétszerese megadja a statikai nyomaték nagyságát.



18. ábra

Az erő statikai nyomatékának geometriai ábrázolása

A nyomaték előjelének megállapítása céljából a továbbiakban azt a forgatónyomatékot tekintjük pozitívnak, amelyik az óramutató járásával ellentétesen forog, a vele egyezőt pedig negatívnak. A forgató hatás értelmét a sík egyik oldaláról pozitívnak, a másiktól pedig negatívnak látjuk. E kétértelműség azonban rögtön megszűnik, hogyha annak a tengelynek irányítást adunk, melyre a nyomatékot számítjuk. Ezt a legegyszerűbben a megismert jobbsodrású koordináta-rendszer felhasználásával szüntethetjük meg. A 18. ábrán látjuk, hogy a z tengely felénk mutat, tehát ha e tengellyel szembe nézünk, akkor a pozitív forgásirány az óramutató járásával ellentétes (az x tengely az y -ba forog), hogyha viszont az y tengely forog az x tengelybe, akkor a forgásirány negatív.

Az erő merőleges komponensekre bontásakor megismertük, hogy az erőt helyettesíthetjük komponenseivel is. A továbbiakban megvizsgáljuk, miként alakul a nyomaték értéke, hogyha azt komponenseivel számítjuk (19. ábra):

Írjuk fel az F erőnek a O ponton átmenő tengelyre számított nyomatékát, felhasználva az ábra alapján azt, hogy

$$k = k_1 - k_2 = x \sin \alpha - y \cos \alpha,$$

$$M = F \cdot k = F(x \sin \alpha - y \cos \alpha) = (F \sin \alpha)x - (F \cos \alpha)y.$$

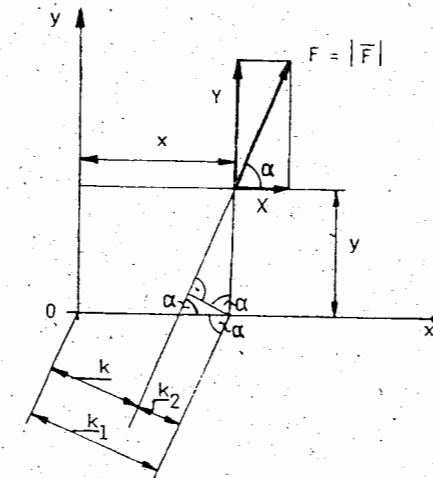
Az erő komponensekre bontásakor azt kapjuk, hogy

$$F_x = X = F \cos \alpha \text{ és } F_y = Y = F \sin \alpha,$$

így adódik, hogy

$$M = F \cdot k = Yx - Xy,$$

vagyis az erő tengelyre számított nyomatéka megegyezik a komponensek ugyanazon tengelyre számított nyomatékának előjeles összegével, ezt nyomatéki tételnek nevezzük.



19. ábra

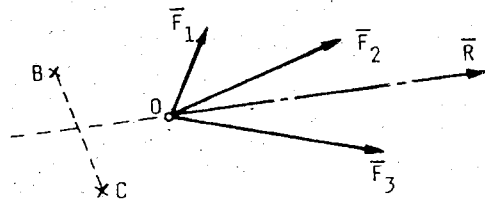
Az erő nyomatékának számítása

Mivel a merőleges komponensekre bontás a komponensekre bontás speciális esete, ezért könnyen igazolható, hogy az erő tetszőleges irányú komponenseinek egy tetszőleges tengelyre ugyanaz a nyomatéka, mint magának az erőnek.

1.7. Az erőegyensúly feltétele nyomatéki tétellel

*Az előbbieken láttuk, hogy egy síkbeli erőrendszer nyomatéka a sík bármely pontján átmenő tengelyre úgy számítható, hogy az eredő erőt megszorozzuk az erő karjával. Egyensúly esetén az eredő zérus, tehát a nyomaték is zérus lesz. A nyomaték azonban akkor is zérus lehet, ha azt a pontot, melyen átmenő tengelyre a nyomatékot számítjuk, az erő hatásvonalán vesszük fel, ebben az esetben tehát a kar zérus. Láthatjuk tehát, hogy az egyensúlyt még nem biztosítja a sík egy pontján átmenő tengelyre számított nyomaték zérus értéke.

Ebből következik, hogy egyensúly esetén a nyomatéknak két olyan ponton átmenő tengelyre kell zérusnak lenni, mely pontokat összekötő egyenes nem megy keresztül az erők metszéspontján (20. ábra).



20. ábra

Az erőrendszer nyomatéka

Az egyensúly feltétele tehát nyomatéki egyenletekkel az alábbiak szerint fogalmazható meg: ha a közös pontos átmenő síkbeli erők nyomatéka a sík két olyan pontján átmenő tengelyre (pl. B, C) zérus, mely pontok összekötő egyenese nem megy át az erők metszéspontján, akkor az erőrendszer egyensúlyban van. Az egyensúlyt tehát matematikailag az alábbi két nyomatéki egyenlet fejezi ki:

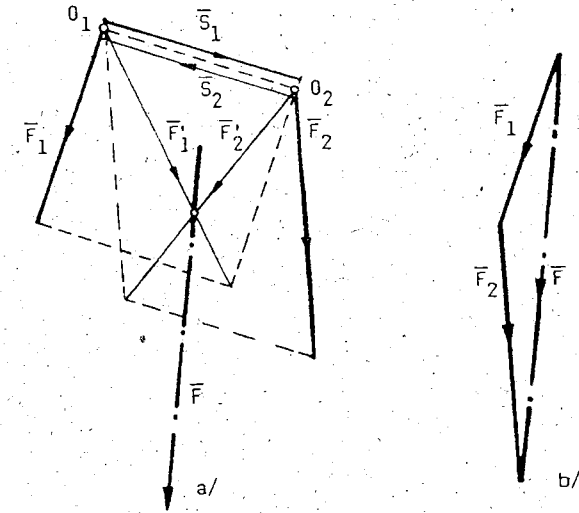
$$\sum M_i^{(B)} = 0 \text{ és } \sum M_i^{(C)} = 0.$$

A fenti két egyenlet azonban nem független a közös metszéspontú síkbeli erők egyensúlyára vonatkozó korábbi két egyenlettől ($\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0$), mivel az egyensúlyt kifejező független egyenletek száma csupán kettő.

Ezért a közös metszéspontú síkbeli erők egyensúlyának számításakor vagy a komponensek egyensúlyára vonatkozó két egyenletet, vagy a nyomatékok zérus értékét kifejező két nyomatéki egyenletet, vagy pedig egy komponensekre és egy a nyomatékokra vonatkozó egyenletet használhatunk.

2. Párhuzamos síkbeli erőrendszer

Az erőparalelogramma segítségével olyan erők eredőjét tudjuk meghatározni, melyek metszéspontja a rajzlapunkon belül esik. E szerkesztésmódot közel párhuzamos illetve párhuzamos hatásvonalú erőknel azonban nem tudjuk alkalmazni, mivel a hatásvonalak a rajz síkján kívül ill. a végtelenben metsződnek. Mielőtt rátérünk a párhuzamos hatásvonalú erők vizsgálatára, előzőleg megszerkesztjük két közel párhuzamos hatásvonalú erő eredőjét (21. ábra). Az ábráról látható, hogy a két erő (F_1, F_2) metszéspontja a rajzlapon kívül esik.



21. ábra

Közel párhuzamos hatásvonalú erők eredője

A két erő eredőjét vektorháromszöggel (21.b ábra) meg tudjuk szerkeszteni, hogyha lépték helyesen felrajzoljuk egymás után őket, így megkapjuk az eredő nagyságát.

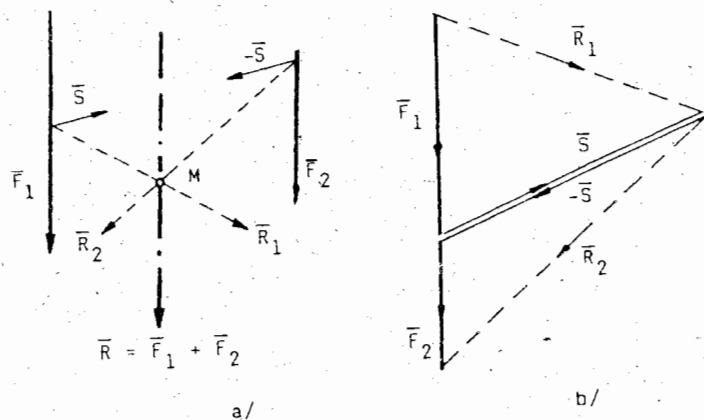
Most már ezzel az erővektorral kellene párhuzamosot húzni a két erő metszéspontján keresztül, de ez a rajzlapon kívül esik. Az eredő hatásvonalának megszerkesztése érdekében mérjük fel erőléptékben az F_1 és F_2 erőket az O_1 ill. az O_2 pontból kiindulva. A negyedik alaptétel értelmében a merev testet támadó erőrendszer hatása nem változik meg, hogyha hozzá egyensúlyban lévő erőrendszert adunk. Esetünkben ez az erőrendszer legyen az S_1, S_2 erő. Vektoraik nagysága legyen egyenlő az O_1, O_2 távolsággal, hatásvonaluk közös, értelmük ellentétes. Az eredeti erőrendszerrel egyenértékű négy erő eredőjét ún. paralelogramma módszerrel külön-külön határozzuk meg. Először megszerkesztjük az F_1 és S_1 erő eredőjét, az F_1' -t, utána pedig az F_2 és S_2 erő eredőjét, az F_2' -t. Az eredeti erőrendszert

most már az \vec{F}_1' és \vec{F}_2' erők helyettesítettük és metszéspontjukon keresztül az eredő erő (\vec{F}) hatásvonalával (21.b ábra) párhuzamosot húzhatunk és erre felmérhetjük az \vec{F} erő nagyságát. A szerkesztést tehát ún. egyensúlyban lévő segéderőkkel el tudtuk végezni.

A bemutatott szerkesztés párhuzamos hatásvonalú erőkre is alkalmazható. A továbbiakban megvizsgáljuk, miként határozható meg két párhuzamos erő eredője, hogyha értelmük megegyező, illetve ellentétes.

2.1. Két párhuzamos hatásvonalú, megegyező értelmű erő eredője

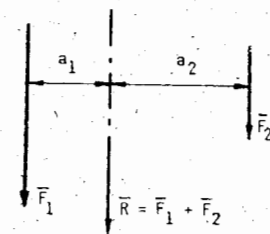
Vizsgáljuk meg, hogy a 22. ábrán látható két erőt (\vec{F}_1, \vec{F}_2) miként helyettesíthetjük az eredőjével. Az előző pontban megismert szerkesztési módszert alkalmazzuk itt is. A két erőből álló erőrendszerhez hozzáadjuk az egyensúlyban lévő $\vec{S}, -\vec{S}$ erőrendszert. Először megszerkesztjük az \vec{F}_1, \vec{S} erők eredőjét, az \vec{R}_1 -et (22.b ábra, felső erőháromszög), majd az \vec{F}_2, \vec{S}_2 , az \vec{R}_2 -t (22.b ábra, alsó vektorháromszög). Ezután az \vec{F}_1, \vec{S} erők metszéspontjából párhuzamosot húzunk az \vec{R}_1 erő hatásvonalával, majd az $\vec{F}_2, -\vec{S}$ erők metszéspontjából az \vec{R}_2 erő hatásvonalával. A két erővektor M jelű metszéspontján áthaladó, az eredeti erőrendszerrel (\vec{F}_1, \vec{F}_2) párhuzamos hatásvonalra ezután felmérhetjük erőléptékben megszerkesztett eredőt, az \vec{R} -et ($\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$).



22. ábra

Azonos értelmű, párhuzamos hatásvonalú erők eredője

Az eredő erő elhelyezkedését nemcsak szerkesztéssel, hanem számítással is meg tudjuk határozni, hogyha felhasználjuk a nyomatéki tételt, vagyis azt, hogy az eredő nyomatéka a sík bármely pontjára merőleges tengelyre egyenlő komponenseinek ugyanazon tengelyre számított nyomatékainak algebrai összegével. Esetünkben e pontot speciálisan vegyünk fel az eredő hatásvonalán, majd a 23. ábra felhasználásával írjuk fel a nyomatékokat:



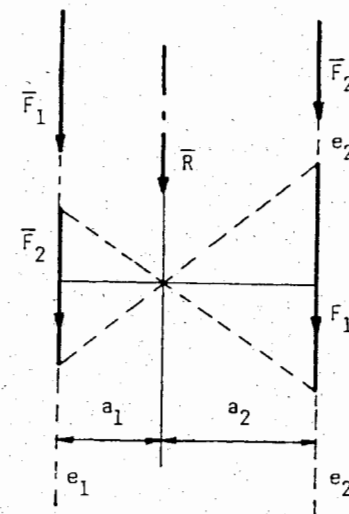
23. ábra

Párhuzamos hatásvonalú erők eredőjének számítása

$$-F_1 a_1 + F_2 a_2 = 0.$$

Mivel az eredő-szerkesztési feladatokban a két párhuzamos erő távolsága ismert, ezért a fenti egyenlet felhasználásával fel tudjuk osztani két részre (a_1, a_2) és így módon az eredő hatásvonalára ismertté válik. A fenti egyenletet felírhatjuk:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

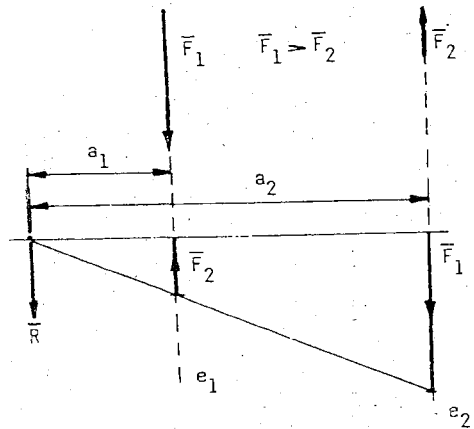


24. ábra

Párhuzamos hatásvonalú, egyező értelmű erők eredője

alakban is. Látható, hogy az eredő hatásvonalára a két erő közül a nagyobbikhoz közelebb helyezkedik el, vagyis az erők nagysága a hatásvonalától mért távolságukkal fordítottan ará-

nyos. Ebből az eredményből adódik egy mechanikus szerkesztési módszer is, nevezetesen az, hogy az F_1 erő e_1 hatásvonalára erőléptékben felmérjük az F_2 erőt, az e_2 hatásvonalra pedig az F_1 erőt. Kössük össze az egyik erő végpontját a másik erő kezdőpontjával és fordítva. A két összekötő egyenes metszéspontja megadja az eredő hatásvonalának helyét (24. ábra). Ezután megszerkesztjük két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes értelmű erő eredőjét. Az eredő szerkesztését az előbbiekhöz hasonlóan végezhetjük el, vagyis az e_1 hatásvonalra erőléptékben felmérjük az F_2 erő nagyságát, az e_2 -re pedig az F_1 nagyságát (25. ábra). Az erővektorok kezdő- és végpontjait összekötő egyenesek metszéspontja megadja az eredő hatásvonalának helyét. Az ábrából látható, hogy az eredő a két erő hatásvonalán kívül, a nagyobbik erőhöz közelebb helyezkedik el, nagysága pedig az összetevők nagyságának különbsége.



25. ábra

Ellentétes értelmű, párhuzamos erők eredője

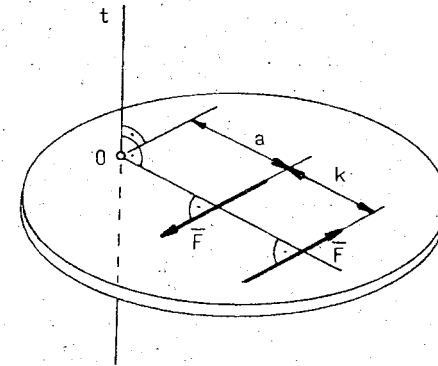
Amennyiben több párhuzamos hatásvonalú erővel állunk szemben, akkor az eredő helyét a nyomatéki tétel felhasználásával ki tudjuk számítani, a szerkesztését pedig a későbbiekben ismertetjük. Az előbbieken ismertetett számítási és szerkesztési módszer felhasználásával elvégezhető valamely erő párhuzamos komponensekre bontása is.

A továbbiakban megvizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor két erő hatásvonalja egymással párhuzamos, nagyságuk egyező és értelmük ellentétes.

2.2. Az erőpár

Két egyenlő nagyságú, párhuzamos hatásvonalú és ellentétes értelmű erőt együttesen erőpárnak nevezünk. Az erőpárt alkotó két párhuzamos erő egy síkot határoz meg, amit az erőpár síkjának nevezünk. Az erőpárra jellemző, hogy a komponensekre felírt egyensúlyi

egyenletek teljesülnek, de egyensúly még sincs, mert az erőpár a sík bármely pontjára nyomatékokot fejt ki. Az erőpárban levő egyik erőt az erőpárt alapjának, a két erő távolságát pedig az erőpár karjának nevezük. A továbbiakban vizsgáljuk meg az 26. ábrán látható erőpár tulajdonságait.



26. ábra
Az erőpár

Számítsuk ki az erőpár nyomatékát az O ponton átmenő t jelű tengelyre:

$$M = F(a+k) - Fa = Fk.$$

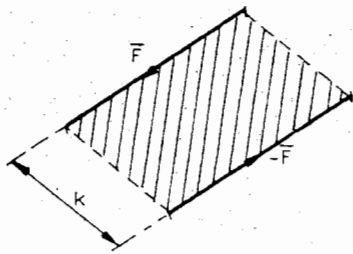
Az eredményből két fontos megállapítás következik:

1. Az erőpár nyomatéka a síkjára merőleges valamennyi tengelyre ugyanakkora. Könnyen belátható ugyanis, hogy a t tengelyt bárhol felvehetjük és így a nyomaték nagysága nem függ az "a" mérettől.
2. Az erőpár nyomatékát az egyik erőnek és az erők merőleges távolságának szorzata adja.

Az erőpárt a nyomaték jellemzi. Amennyiben a statikai nyomatékhoz hasonlóan erőléptékben ábrázoljuk az erőpár erőit, és hosszléptékben az erőpár karját, akkor az erőpár nyomatékát szemléletesen ábrázoljuk (27. ábra).

A sraffozott (paralelogramma) terület megadja az erőpár nyomatékát. A paralelogramma területét az erőpár irányában körüljárva a terület bal kezünk felé esik és a statikai nyomaték értelmezéséhez hasonlóan ez pozitív nyomatéknak felel meg. Az eddigi előjelszabály természetesen továbbra is érvényben marad.

Mivel az egy síkban fekvő erőpárok nyomatéka az erőpár alapjának és karjának szorzata, ezért könnyen belátható, hogy az erőpár forgató hatása változatlan marad, akárhová toljuk is el saját síkjában. Ugyancsak elmondhatjuk, hogy az erőpár forgató hatása a síkjára merőleges tengely közül akkor is változatlan marad, ha az erőpárt síkjával párhuzamosan toljuk el.

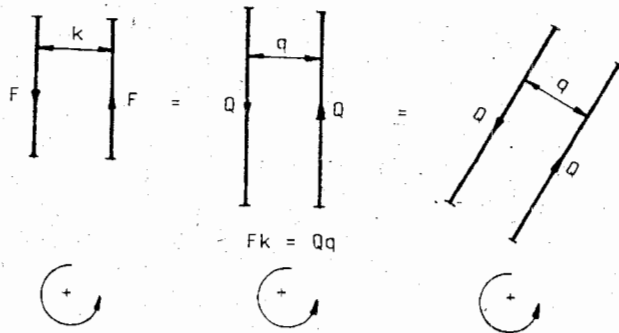


Hosszmérték: $1 \triangleq \ell$
Erőmérték: $1 \text{ cm} \triangleq \text{x.N}$

27. ábra
Az erőpár nyomatéka

Az erőpárnak valamely tengelyre számított nyomatéka előjeles mennyiség, ezért a közös síkú erőpárok akkor vannak egyensúlyban, ha nyomatékaik algebrai összege zérus. Ebből kifolyóan igazolható az is, hogyha a közös síkban vagy a párhuzamos síkban működő két erőpár nyomatéka egyenlő, akkor a két erőpár egymással egyenértékű.

Minden közös síkú erőpár egyenértékű, melynek nyomatéka és forgásértelme megegyezik. Ebből kifolyóan az erőpár átalakítható egyenértékű másik erőpárrá (28. ábra).



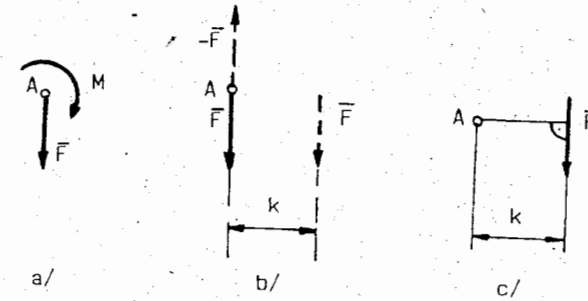
28. ábra
Egyenértékű erőpár

Az erőpár vektormennyiség, nyomatékvektorának jele: \vec{M} . Az erőpár a statika éppolyan alapfogalma, mint az erő. A merev testet erők és erőpárok is terhelhetik.

Az erőt és az erőpárt közös néven *dinámnak* nevezzük és ebbe a fogalomba a zérus nagyságú erőt is beleértjük, így a dinám lehet erő, erőpár és zéruserő.

2.3. Az erő és erőpár összetétele

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy egy \vec{F} erő és egy \vec{M} erőpár összetétele mit eredményez (29. ábra).



29. ábra
Erő és erőpár összetétele

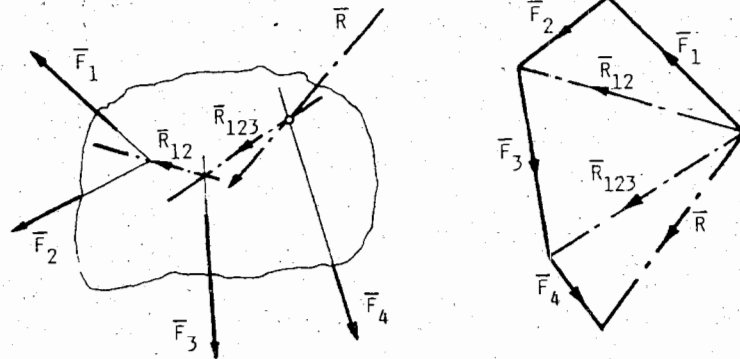
Az M erőpár bármely nagyságú erőpárral felírható, esetünkben azonban az alapot válasszuk F -nek. Ezután az erőpár karját (k) az $M=Fk$ összefüggésből számíthatjuk.

A második alaptétel értelmében a 29.b ábrán látható baloldali erőrendszer egyensúlyban van és ezért a negyedik alaptétel felhasználásával eltávolítható. Így tehát az F erő és az M nyomaték egyetlen erővel (F) helyettesíthető, mely nagyságra és irányra megegyezik az eredeti F erővel, azonban hatásvonala önmagával párhuzamosan $k=M/F$ távolságra eltolódott, tehát az erőt annyival kell önmagával párhuzamosan eltolni, hogy nyomatéka az eredeti hatásvonal egy pontján átmenő tengelyre megegyezzen a hozzáadandó erőpár nyomatékával.

3. Általános síkbeli erőrendszer

3.1. Az eredő meghatározása közvetlen erőösszetétellel

A síkbeli erők eredőjét két erő esetén egyszerűen meg tudjuk határozni. Amennyiben kettőnél több szétszórt erővel állunk szemben, akkor ezt a szerkesztési módszert többször meg kell ismételni, vagyis a két erő eredőjéhez hozzá kell adni a harmadik erőt és így tovább (30. ábra).

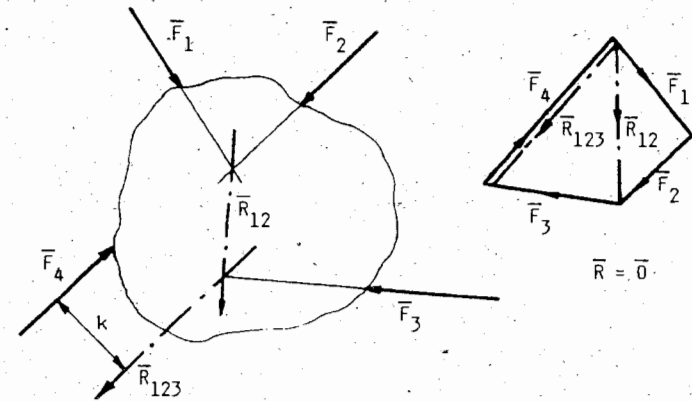


30. ábra

Szétszórt síkbeli erők eredőjének szerkesztése

Az ábrán látható módon a szerkesztést úgy végezzük el, hogy először léptékhelyesen felmérjük egymás után a 30.a ábrán levő merev testre ható \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erőket és meghatározzuk eredőjüket, az \vec{R}_{12} -t (30.b ábra), melyhez hozzáadjuk az \vec{F}_3 erőt és megkapjuk az \vec{R}_{123} részeredőt. Ehhez hozzáadjuk az \vec{F}_4 erőt és megkapjuk az eredő (\vec{R}) nagyságát és irányát. A továbbiakban az eredőt kell a merev testen elhelyezni. Ebből a célból meg kell keresni a merev testen az \vec{F}_1 , \vec{F}_2 erő metszéspontját, ahonnan párhuzamosot kell húzni az \vec{R}_{12} részeredővel. A jobboldali vektorsokszög figyelembevételével ezután meg kell keresni az \vec{R}_{12} és az \vec{F}_3 erő metszéspontját, melyből kiindulva meg kell rajzolni az \vec{R}_{123} részeredővel párhuzamos egyenest, melynek az \vec{F}_4 erővel való metszéspontja megadja a merev testre ható eredő erő hatásvonalának egy pontját. A hatásvonalat az \vec{R} eredővel párhuzamosan húzzuk, melyre ezután fel tudjuk mérni az eredő nagyságát.

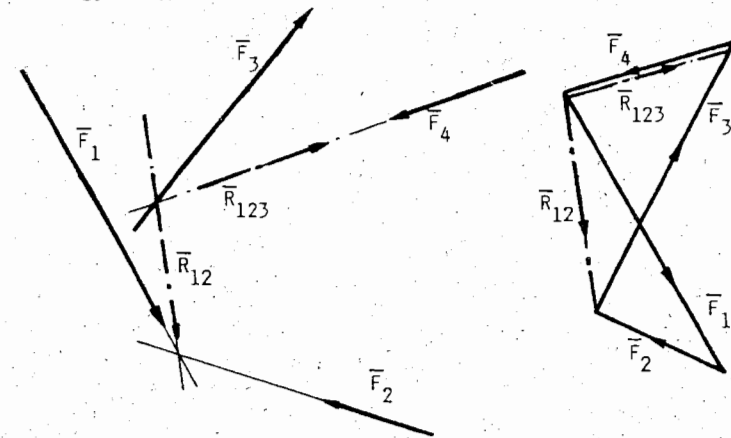
A szerkesztésből láttuk, hogy az erők helyettesíthetők egyetlen velük egyenértékű erővel, az eredővel. A továbbiakban vizsgáljuk meg, hogy milyen esetek fordulhatnak még elő. A 31. ábrán az előzőekhez hasonlóan megszerkesztettük az erőrendszer eredőjét. A 31.b ábráról látható, hogy a vektorsokszög záródik, de mikor a merev testre felvisszük az \vec{R}_{123} részeredőt, látjuk, hogy ez az \vec{F}_4 erőtlől „ k ” távolságra helyezkedik el, vele ellentétes értelmű és ennek az erőpárnak a nyomatéka az $M=Fk$ összefüggés alapján számítható.



31. ábra

Az erőrendszer eredője erőpár

A 32. ábrán levő szerkesztésből pedig adódik, hogy az \vec{R}_{123} részeredő az \vec{F}_4 hatásvonalára esik, vele egyenlő nagyságú és ellentétes értelmű, tehát a második alaptétel értelmében az erőrendszer egyensúlyban van.



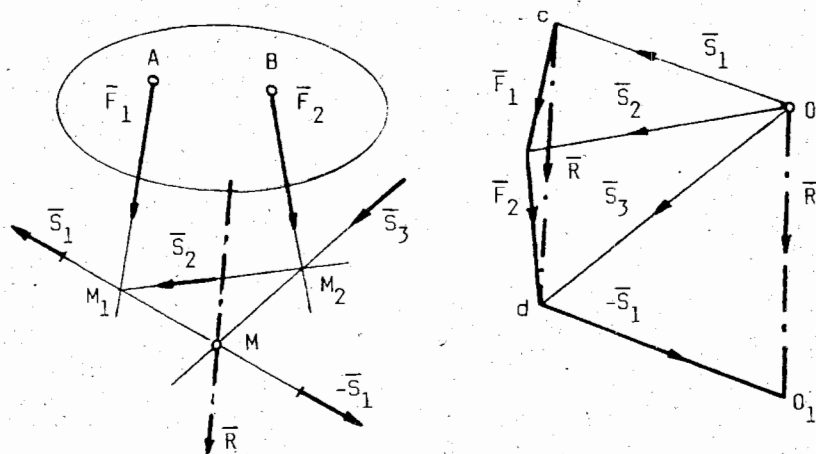
32. ábra

Egyensúlyi erőrendszer

A 31. és 32. ábráról látható, hogy a vektorsokszög zárt volta az egyensúlynak még nem elégséges feltétele, mivel az eredő erőpár is lehet.

3.2. Szerkesztés segéderőkkel

A 2. fejezetben láttuk, hogy a szerkesztés kissé bonyolultabbá válik, hogyha az erőrendszer erői a rajzlapunkon nem metszik egymást. Ebben az esetben segéderők felvételével tudjuk a szerkesztést elvégezni. Ennek menetét a 33. ábra ismerteti.



33. ábra

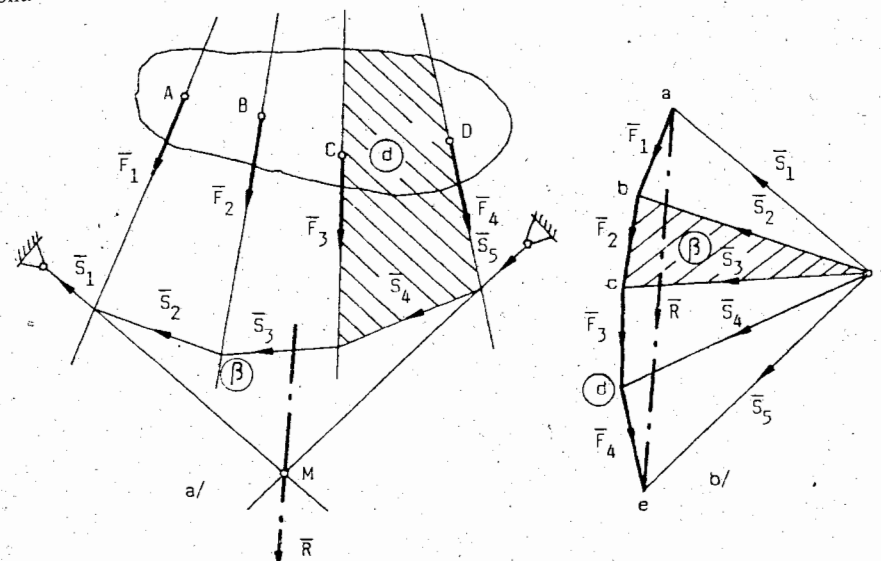
Eredő szerkesztése segéderőkkel

Az ábrán látható merev testre az A és B pontban az \vec{F}_1 ill. az \vec{F}_2 erő hat. Adjuk hozzá az erőrendszerhez az egyensúlyban levő \vec{S}_1 és $-\vec{S}_1$ segéderőket, ezzel az erőrendszer hatásán nem változtattunk. Ezután az \vec{F}_1 erőhöz adjuk hozzá az \vec{S}_1 erőt (31.b ábra), melynek eredményeként az \vec{S}_2 erőt kapjuk, ehhez az \vec{F}_2 erőt hozzáadva megkapjuk az \vec{S}_3 erőt. Mivel a merev testre ható erőrendszerhez egyensúlyi erőrendszert adtunk, ezért a \vec{S}_3 erőhöz még hozzá kell adni a $-\vec{S}_1$ erőt, így megkapjuk a négy erőből álló erőrendszer eredőjét, hogyha összekötjük az \vec{S}_1 erővektor O kezdőpontját a $-\vec{S}_1$ vektor végpontjával az O_1 -gyel. Ugyanerre az eredményre jutunk, hogyha az \vec{F}_1 vektor kezdőpontját (c) az \vec{F}_2 vektor végpontjával (d) kötjük össze. Ezután az erőrendszer eredőjét (\vec{R}) el kell helyezni a merev testen. Ebből a célból az \vec{S}_1 , \vec{F}_1 erő hatásvonalának M_1 metszéspontjából párhuzamost kell húzni az \vec{S}_2 erő hatásvonalával. E hatásvonal és az \vec{F}_2 erő hatásvonalának M_2 metszéspontjából párhuzamost kell húzni az \vec{S}_3 hatásvonalával. Az \vec{S}_1 , $-\vec{S}_1$ erők és az \vec{S}_3 erő hatásvonalának metszéspontja megadja azt az M pontot, melyen keresztül az \vec{R} eredő hatásvonalával (33.b ábra) párhuzamost húzva megkapjuk a merev testre ható eredő erő hatásvonalát és ezen el tudjuk helyezni az eredőt.

A bemutatott szerkesztési módszer általánosításával eljutunk az ún. kötélsokszög szerkesztéséhez.

3.3. Szerkesztés kötélsokszöggel

A 34. ábrán látható merev testre az $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ erők hatnak. Rajzoljuk fel az erők vektorábráját (34.b ábra) és így megkapjuk a vektorsokszöget vagy más néven vektorpoligont.



34. ábra

Kötélsokszög szerkesztése

A vektorsokszögtől jobbra vegyünk fel valahol egy O póluspontot. A póluspontot kössük össze a vektorok kezdő- és végpontjaival, ezeket az összekötő egyeneseket a vektorsokszög *sugarainak* nevezzük és sorrendben megfelelnek az $\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_5$ sugárerőknek. Ezután a merev testre ható erők hatásvonalait (34.a ábra) sorrendben metszésbe hozzuk a vektorsokszög sugaraival párhuzamos egyenesekkel. Először az \vec{S}_1 kötélerővel párhuzamos egyenessel messzük az \vec{F}_1 erő hatásvonalát, majd a metszéspontból kiindulva húzzunk párhuzamost az \vec{S}_2 kötélerő hatásvonalával és így tovább. Végezetül az első (\vec{S}_1) és az utolsó (\vec{S}_5) kötélerő hatásvonalának M metszéspontjában megkapjuk az eredő erő hatásvonalának egy pontját. Ezen a ponton keresztül most már párhuzamost kell húzni az \vec{R} eredő hatásvonalával és megrajzolhatjuk az eredőt.

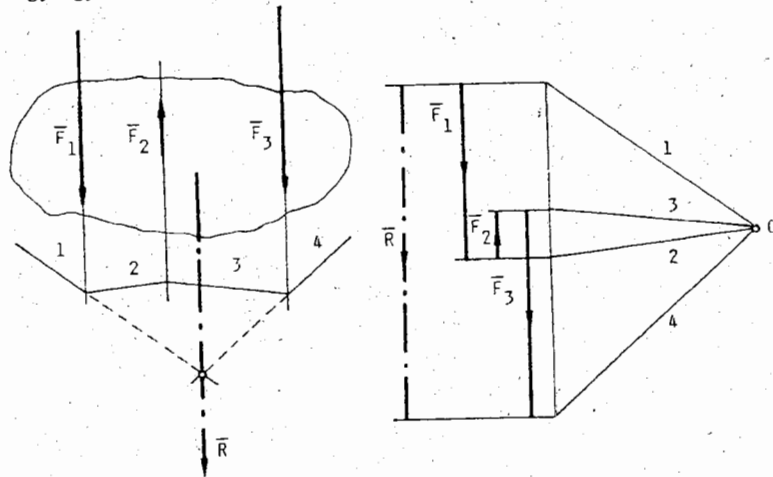
A merev testre ható erők ($\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$) hatásvonalát metsző $\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_5$ erők az ún. kötélsokszöget határozzák meg. Az elnevezés onnan adódik, hogy a tökéletesen hajlékony kötélen az $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$ erők hatására az $\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_5$ kötélerők által meghatározott alakot veszi fel. Szemléletesség kedvéért a kötélsokszög két végét felfüggesztettük, így jól látható az egyensúlyi alak. Mivel az O pontot bárhol felvehetjük, ezért ebből következik, hogy végtelen

számú kötelsokszög tartozik a merev testre ható erőrendszerhez, ami azt jelenti, hogy a kötélnak végtelen egyensúlyi alakja van. Látható az is, hogy a vektorsokszög felvétele már meghatározza a kötelsokszög alakját.

Általánosságban elmondhatjuk, hogy a vektorsokszög és a kötelsokszög egymásnak megfelelő alakzatok, közöttük reciprocitás (kölcsonösség) áll fenn:

- a kötelsokszög kötelerőinek a vektorsokszögben a vektorsugarak felelnek meg,
- bármelyik ábrán kiválasztunk egy pontban metsződő három egyenest, a másik ábra megfelelő vonalai háromszöget alkotnak, például a kötelsokszög β pontjának a vektorsokszög Obc háromszöge felel meg és a vektorsokszög d pontjának a kötelsokszög d jelű sraffozott háromszöge felel meg.

Alakja szerint a vektorsokszöget és a kötelsokszöget *nyitottnak* vagy *zártnak* nevezzük. Zárt vektorsokszög esetében az eredő zérus, míg zárt kötelsokszög esetén az első és utolsó kötéloldal egy egyenesbe esik.

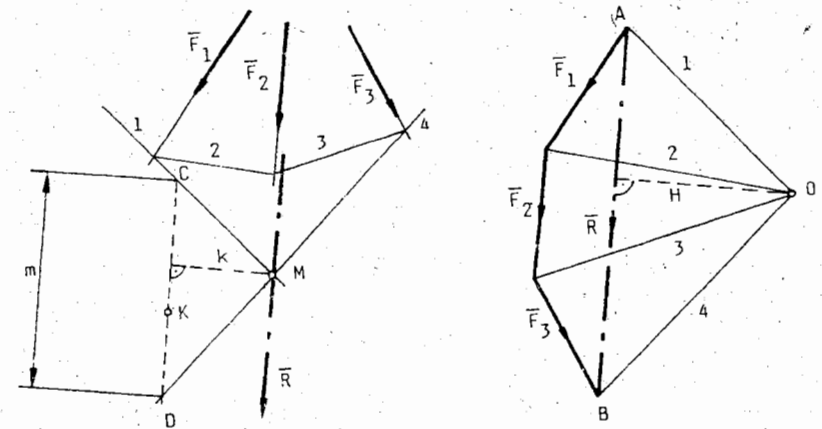


35. ábra

Párhuzamos hatásvonalú erőrendszer eredője

A megismert kötelsokszög szerkesztéssel egyszerűen meg tudjuk szerkeszteni a párhuzamos hatásvonalú erőrendszer eredőjét is (35. ábra). A szerkesztés lényege, hogy az erőrendszer erőivel párhuzamos hatásvonala mentén felmérjük az erőket és felvesszük az O pólust, majd a szerkesztést a tanultak szerint végezzük el. A szerkesztés olyannyira mechanikussá tehető, hogy nem szükséges a kötelerők irányát megadni és a hatásvonalakat a megkülönböztetés céljából elegendő csupán számozni.

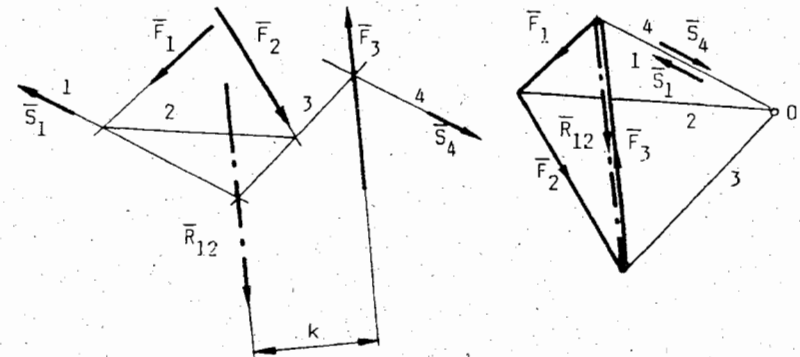
A kötelsokszög szerkesztést fel lehet használni az erőrendszer nyomatékának szerkesztésére is (36. ábra).



36. ábra

Az erőrendszer nyomatékának szerkesztése

Ismeretes, hogy az erőrendszer nyomatékát a K ponton átmenő tengelyre az $M=kR$ összefüggés alapján tudjuk meghatározni. Feladatunk, hogy e számítást geometriailag oldjuk meg. Célszerűségi okok miatt erőléptékben megszerkesztettük a 36.b ábrán látható vektorsokszöveget, illetve hosszléptékben a 36.a ábrán látható kötelsokszöveget. A K ponton keresztül párhuzamosot húzunk az eredő hatásvonalával, ami metszi az 1-es és 4-es kötelerők hatásvonalát a C és D pontban, és a két párhuzamos egyenes távolsága megadja az eredőhöz tartozó erőkart. Mivel az OAB háromszög és az MCD háromszög hasonló, ezért írhatjuk, hogy $m:k=R:H$, ebből $mH=kR=M$. (A H távolságot pólustávolságnak nevezzük.)



37. ábra

Az erőrendszer eredője erőpár

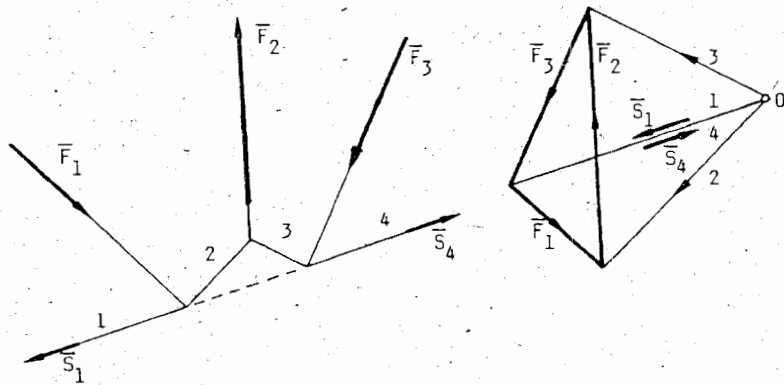
A kötélsokszög szerkesztéséből ismeretes, hogy az O pólust tetszőlegesen felvehetjük (így a pólustávolság lehet 1, vagy a 10 valamely hatványa), ezért helyes választás esetén az m távolság megadja a nyomatékot.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a vektorsokszög ill. a kötélsokszög zárt vagy nyitott voltából az eredőre vonatkozóan milyen következtetéseket vonhatunk le.

A 37. ábrán látható erőrendszernek megszerkesztettük az eredőjét kötélsokszög módszerrel. A szerkesztésből látható, hogy a vektorsokszög zárt, ellenben a kötélsokszög nyitott (az \bar{S}_1 és \bar{S}_4 kötélérők hatásvonala párhuzamos). A vektorrendszer tehát az \bar{R}_{12} és az \bar{F}_3 erőből álló erőpár, melynek nyomatéka $M = kR_{12} = kF_3$. Elmondhatjuk, hogy ha a vektorsokszög zárt, a kötélsokszög pedig nyitott, akkor az erőrendszer eredője erőpár.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy egyensúly esetén mit mondhatunk el a vektorsokszögről ill. a kötélsokszögről.

Egyensúly esetén az eredőnek zérusnak és az erők nyomatékának a sík bármely pontján átmenő tengelyre szintén zérusnak kell lennie. Ilyen erőrendszert mutat a 38. ábra. Látható, hogy a síkbeli általános erőrendszer egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele, hogy mind a vektor-, mind a kötélsokszög zárt legyen.

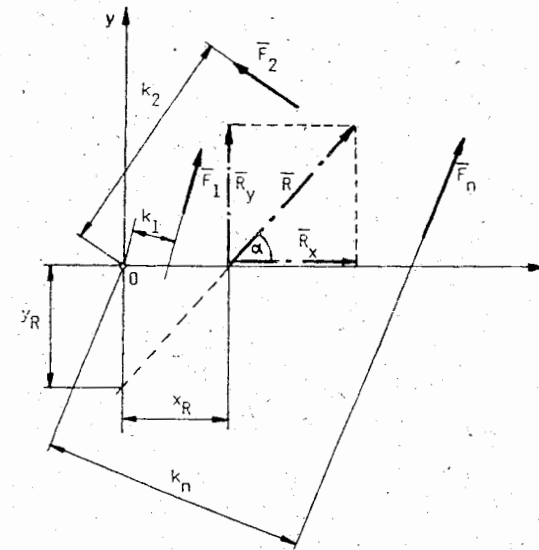


38. ábra
Egyensúlyi erőrendszer

3.4. A síkbeli általános erőrendszer eredőjének meghatározása számítással

Határozzuk meg a 39. ábrán látható általános helyzetű erőrendszer eredőjét. Tételezzük fel azt az általános esetet, amikor az eredő egyetlen erő. Az eredő vektorának komponenseit a két egymásra merőleges irányú vetületi egyenletből tudjuk meghatározni:

$$R_x = \sum F_{ix} \text{ és } R_y = \sum F_{iy}$$



39. ábra
Síkbeli erőrendszer eredőjének meghatározása

Mivel az erőrendszer és az eredő egymással egyenértékű, ezért elmondhatjuk, hogy az erőrendszer statikai nyomatéka ($M_i^{(0)}$) az O ponton átmenő tengelyre (az O pont tetszőleges lehet) megegyezik az eredő erő O pontra számított nyomatékával ($M_R^{(0)}$):

$$\sum M_i^{(0)} = M_R^{(0)}$$

A nyomatéki tétel értelmében az eredő erő nyomatéka egyenlő a komponensek nyomatékának előjeles összegével. Tudjuk továbbá, hogy az eredő hatásvonalán eltolható, ezért az x tengellyel való metszéspontig eltoljuk és ott komponenseire bontjuk, így írhatjuk, hogy

$$\sum M_i^{(0)} = x_R R_y,$$

innen

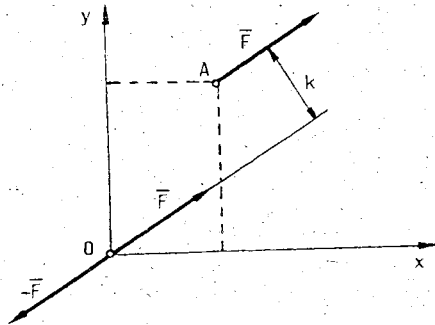
$$x_R = \frac{\sum M_i^{(0)}}{R_y}$$

Mivel a $\text{tg } \alpha = R_y/R_x$ összefüggésből az eredő állásszöge is számítható, ezért meg tudjuk határozni az y tengellyel való metszéspontját.

Az eredő erő helyzetét természetesen akkor is meg tudjuk határozni, hogyha az erőrendszer erőpárokat is tartalmaz.

3.5. Az erőrendszer pontra redukálása

Amikor az erőrendszert valamely hatásvonalán kívül eső pontba akarjuk áthelyezni (redukálni), akkor a 2.4. fejezetben ismertetett feladatott — az erő és erőpár összetételét — fordítva kell megoldani. Vizsgáljuk meg, miként redukálhatjuk a 40. ábrán látható \vec{F} erőt a koordinátarendszer kezdőpontjába, az O pontba. A negyedik alaptétel értelmében az erőrendszer hatása nem változik meg, hogyha hozzá egyensúlyi erőrendszert (\vec{F} , $-\vec{F}$) adunk, mely az O pontban hat és hatásvonaluk párhuzamos az \vec{F} erő hatásvonalával. Látható, hogy az A pontban támadó \vec{F} erő és az O pontban támadó $-\vec{F}$ erő párt alkot, ami helyettesíthető nyomatékával, az $M=Fk$ -val. Az erőpárnál megismert szabályok értelmében az erőpár nyomatéka a sík bármely pontjába áthelyezhető, így az O pontba is. Az \vec{F} erő O pontba redukálásakor, tehát egy erőt és egy erőpárt kaptunk.



40. ábra
Az \vec{F} erő redukálása az O pontra

Általánosságban elmondható, hogy egy erő valamely pontra redukálásakor egy, az adott erővel egyenlő nagyságú erőt és egy erőpárt kapunk. Az erőpár nyomatéka egyenlő az adott erőnek a szóbanforgó ponton átmenő tengelyre számított nyomatékával.

Amennyiben az erőrendszer több erőből áll, akkor a redukálást minden egyes erőre el kell végezni és eredményként kapjuk a helyettesítő eredő erő

$$R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}$$

komponenseit — az eredő nagysága $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ —, valamint az erőrendszer nyomatékát:

$$M = \sum M_i.$$

Az általános síkbeli erőrendszer eredője általában tehát egy erő és egy erőpár. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a három független egyenlet milyen kombinációi fordulnak elő és mi a fizikai tartalmuk.

3.6. Síkbeli erőrendszerek különböző eseteinek vizsgálata

Valamely általános síkbeli erőrendszer vizsgálatához három egyenletre, két vetületi és egy nyomatéki egyenletre van szükség:

$$R_x = \sum F_{ix},$$

$$R_y = \sum F_{iy},$$

$$M = \sum M_i.$$

Eredő erő létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a két vetületösszeg közül legalább az egyik ne legyen zérus.

Az erőpár létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a két vetületösszeg zérus legyen, de a nyomatékösszeg zérustól különbözzön:

$$\sum F_{ix} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0,$$

$$\sum M_i \neq 0.$$

Az eredő erőpárt tehát a $\sum M_i = M_R$ egyenlet adja meg.

A síkbeli általános erőrendszer egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele, hogy a két vetületösszeg és a sík bármely pontján átmenő tengelyre számított statikai nyomaték zérus legyen:

$$\sum F_{ix} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0,$$

$$\sum M_i = 0.$$

A három egyenletből álló egyenletrendszer alapján három ismeretlen határozható meg. Minden olyan síkbeli statikai feladatot, melyben az ismeretlenek száma a felírható egyenletek számával egyenlő, statikailag határozott feladatoknak nevezzük.

A szétszórt síkbeli erők egyensúlyának feltételét csupán nyomatéki egyenletekkel is kifejezhetjük. Egyensúly esetén ugyanis az erők nyomatékának összege a sík bármely pontjára zérus, így végtelen sok nyomatéki egyenletet írhatunk fel, melyek azonban nem mind függetlenek egymástól. Az előbbiekből következik, hogy a síkbeli erők egyensúlyát három, egymástól független egyenlet fejezheti ki. Könnyen igazolható, hogy az általános síkbeli

erők egyensúlyát három, nem egy egyenesre eső ponton (A, B, C) átmenő tengelyre számított nyomatékösszeg zérus értéke fejezi ki:

$$\Sigma M_i^{(A)} = 0,$$

$$\Sigma M_i^{(B)} = 0,$$

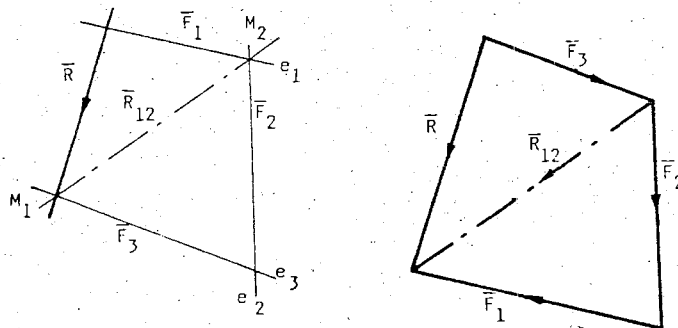
$$\Sigma M_i^{(C)} = 0.$$

3.7. Síkbeli erők felbontása három komponensre

A síkbeli erők felbontásakor három esetet különböztetünk meg. Az egyik, amikor a hatásvonalak az erő hatásvonalán metszik egymást, ebben az esetben végtelen sok megoldás lehetséges, a másik, amikor a hatásvonalak az erő hatásvonalán kívüli pontban metszik egymást, ebben az esetben a feladat értelmetlen. A probléma egyértelműen megoldható mind szerkesztő, mind számító eljárással, hogyha a három komponens nem megy keresztül egy ponton.

A Culmann-féle szerkesztés

A szerkesztés azon az elven alapszik, hogy az erő és két komponense egy közös ponton megy keresztül. A 41. ábrán látható \bar{R} erőt kell az e_1, e_2, e_3 hatásvonalon működő erőkre felbontani. Ebből a célból kétszer alkalmazzuk az erőnek két komponensre bontását. Első lépésként az e_1 és e_2 hatásvonalon működő \bar{F}_1 és \bar{F}_2 erőkomponenseket helyettesítjük eredőjükkel, az \bar{R}_{12} -vel. Az \bar{R}_{12} erő hatásvonalának a fentiek értelmében keresztül kell mennie a felbontandó erő (\bar{R}) hatásvonalának és az e_3 hatásvonal M_1 metszéspontján. Ezután az \bar{R} erőt fel kell bontani az e_3 hatásvonalon működő \bar{F}_3 erőre és az \bar{R}_{12} erőre (41.b. ábra). Mivel



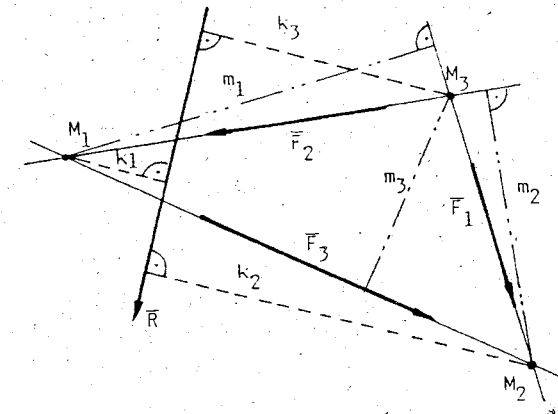
41. ábra
A Culmann-szerkesztés

az \bar{R}_{12} erő az e_1 és e_2 hatásvonalon működő erők eredője, ezért utolsó lépésként ezt az erőt kell felbontani a két hatásvonalon működő F_1 és F_2 komponensre. Ezzel a feladatot az ún. Culmann-szerkesztéssel megoldottuk.

A 41.b ábráról látható, hogy a vektorsokszögben a komponensek nyílfolyama ütközik az adott erővel (\bar{R}), mivel ezt bontottuk fel három adott hatásvonalon működő erőre. A fentebbi feladatot számítással is megoldhatjuk, a módszert a következőkben ismertetjük.

A Ritter-féle számító eljárás

A komponensek meghatározását három, nem egy egyenesre eső pontra felírt nyomatéki egyenlet segítségével oldjuk meg (42. ábra).



42. ábra
A Ritter-féle számító eljárás

A pontokat úgy kell célszerűen megválasztani, hogy azok mindig két ismeretlen erő hatásvonalának metszéspontjában legyenek, így két erőnek a nyomatéka erre a pontra zérus és az egyenletben csak egy ismeretlen szerepel.

Az ábrán látható \bar{R} erőt kell három olyan adott hatásvonalú erőre felbontani, melyek egymást páronként az M_1, M_2 és M_3 pontban metszik. Az \bar{R} erőnek a metszéspontokig mért távolságait k_1, k_2, k_3 -mal jelöltük, míg az egyes komponensek karjait m_1, m_2, m_3 -mal. Ezután felírjuk a nyomatéki tételt az egyes pontokra:

Az M_1 pontra: $-Rk_1 = -F_1m_1,$

az M_2 pontra: $Rk_2 = F_2m_2,$

az M_3 pontra pedig $Rk_3 = F_3m_3.$

Az egyenletről az ismeretlen komponensek nagysága számítható:

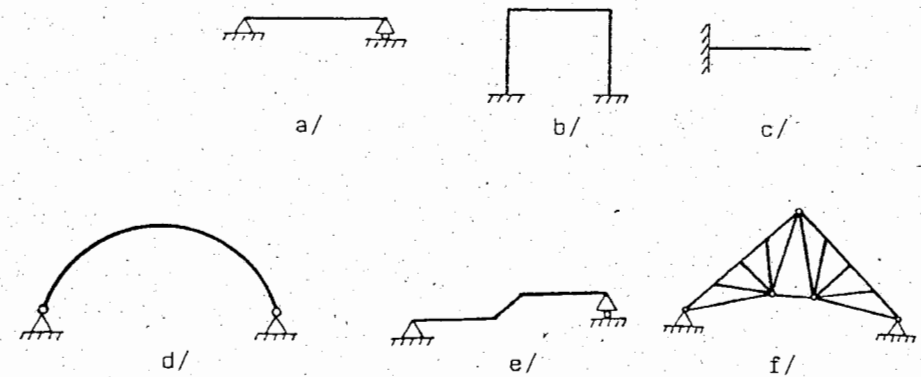
$$F_1 = \frac{Rk_1}{m_1}, \quad F_2 = \frac{Rk_2}{m_2}, \quad F_3 = \frac{Rk_3}{m_3}$$

Az erő három adott hatásvonalon működő komponensre bontásakor mind az erő, mind a komponens a vizsgált ponton átmenő tengelyre azonos értelmű nyomatékot ad, egyensúlyozáskor pedig az értelem ellentétes.

4. Síkbeli tartók

4.1. Alapfogalmak

A teherhordásra szolgáló szerkezeteket *tartószerkezeteknek* vagy röviden *tartóknak* nevezzük. A továbbiakban olyan tartókkal foglalkozunk, melyeknél a tartószerkezet és a tartóra ható erők egy közös síkban vannak, ezeket *síkbeli tartóknak* nevezzük. A síkbeli tartók alakjuk, keresztmetszetük, anyaguk szerint sokfélék lehetnek. A 43. ábrán néhány tartótípust látunk.



43. ábra
Síkbeli tartótípusok

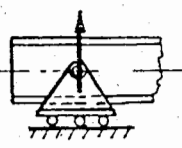

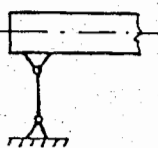
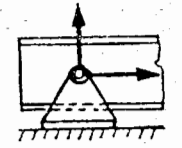
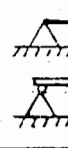
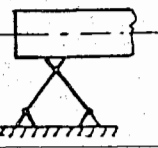
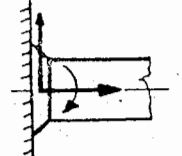
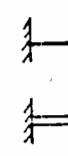
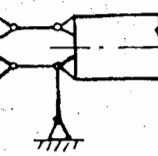
Azokat a tartótípusokat, melyek egy merev testből állnak, *egyszerű tartóknak* (43.a, b, c, d, e), míg a több merev testből összekapcsolt szerkezetet *összetett tartóknak* (41.f) nevezzük. A tartókat alakjuk szerint felosztjuk *egyenesvonalú* (41.a, c), *törtvonalú* (41.e) és *ívelt* (41.d) tartókra.

A tartók jelentős része olyan kialakítású, hogy keresztmetszeti méreteik a hossz méretéhez viszonyítva kicsik.

Az olyan testet, melynek mérete egy meghatározott vonal mentén lényegesen nagyobb, mint a vonalra merőleges bármely irányban, *rúdnak* nevezzük. A következőkben a rudak legegyszerűbb fajtáját vizsgáljuk, amit prizmatikus rúdnak nevezünk. *Prizmatikusnak* akkor nevezzük a rudat, ha úgy származtatható, hogy egy egyenes szakasz mentén egy, az egyenesre merőlegesen álló síkidomot úgy tolnunk végig, hogy a síkidom súlypontja az egyenesen marad, és a síkidom az eltolás során nem fordul el. A síkidom által súrolt térrész a prizmatikus rúd. A síkidom a rúd *keresztmetszete*, az a vonal pedig, amelyen a síkidom súlypontja mozog, a rúd *súlyvonalának*, *tengelyvonalának* vagy *középvonalának* nevezzük.

A továbbiakban először a legfontosabb síkbeli tartótípusokat, a kéttámaszú és a befogott tartót vizsgáljuk, illetve foglalkozunk megtámasztási módjaikkal.

A *tartók megtámasztásához* használt szerkezeti elemeket *saruknak* nevezzük. A saru lehet *álló* vagy *mozgó*. (44. ábra). A *mozgó saru* görgőkön mozdulhat el, amiből következik, hogy az ilyen megtámasztás csak a függőleges irányú elmozdulást akadályozza meg, vagyis csak függőleges irányú reakcióerőt képes kifejteni. A támasztóerő támadáspontja és hatásvonala ismert, ezért jellemzéséhez *egy adat*, az erő nagyságának megadása elegendő. Egyetlen csuklós rúddal helyettesíthető. Az *álló saru* vagy *csukló* olyan támasztó szerkezet, amely a rúd megtámasztott pontjának elmozdulásait megakadályozza, a rúd azonban e pont körül szabadon elfordulhat. Az *álló saru* a reakcióerő hatásvonalának csak egy pontját adja meg és a reakcióerőnek sem a nagysága, sem az iránya nem ismert. Az *álló saru* tehát két ismeretlen jelent és két csuklós végű rúddal helyettesíthetjük. A hídszerkezeteket a hőmérsékletváltozás miatt úgy alakítják ki, hogy az egyik végén alátámasztásuk *álló saruval*, a másik végén pedig *mozgó saruval* történik.

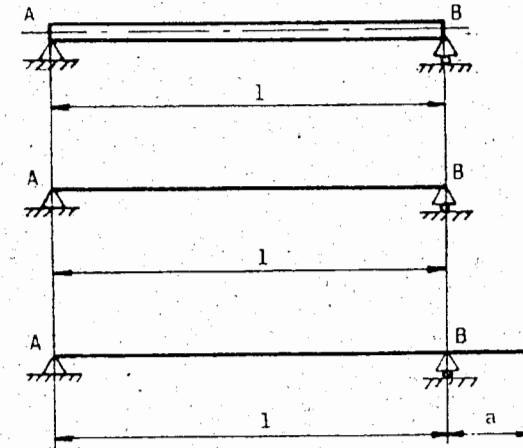
A megtámasztás neve	Vázlatos szerkezeti megoldás	Reakcióerők	Ismeretlenek száma	Jelképes ábrázolás	A megtámasztás megvalósítása rudakkal
Mozgó saru		F_A	1		
Álló saru		F_{AX} F_{AY}	2		
Befogás		F_{AX} F_{AY} M_A	3		

44. ábra
Síkbeli támasztó szerkezetek

A *befogás* a rúd befogott keresztmetszetének megakadályozza bármilyen irányú elmozdulását és elfordulását. Ennek megfelelően a befogás helyén nemcsak ismeretlen nagyságú és irányú erő, hanem még reakciónyomaték is ébred és ez akadályozza meg a befogás síkjában a keresztmetszet elfordulását.

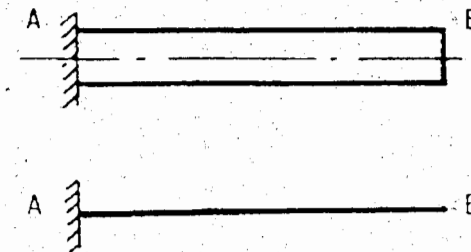
Tehát a befogás a számítások szempontjából három ismeretlent jelent és három csuklós rúddal pótolható.

A *kéttámaszú tartó* az egyik legegyszerűbb és leggyakrabban előforduló szerkezeti elem (45. ábra). A rúd egyik végén rendszerint csuklós, a másik végén pedig görgős alátámasztású. Az alátámasztások közötti szakaszt *nyílásnak*, *támaszköznek* vagy *fesztávolságnak*, míg az alátámasztáson túlnyúló részt *konzolnak* nevezzük. A gépészetben használatos tengelyek többnyire kéttámaszú tartónak tekinthetők.



45. ábra
Kéttámaszú tartó

A *befogott tartó* befogással rögzített prizmatikus rúd (46. ábra). Használatos a befalazott vagy konzolos tartó elnevezés is. A rúd bármilyen terheléssel szemben befogással is rögzíthető.

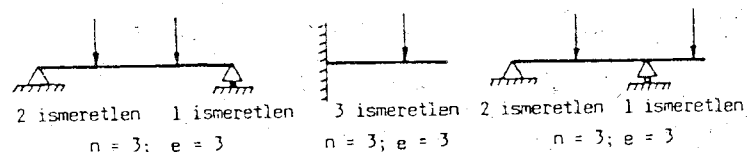


46. ábra
Befogott tartók

4.2. A statikai határozottság

A tartószerkezetek statikai szempontból határozottak vagy határozatlanok lehetnek. Azokat a tartószerkezeteket, melyek támasztóerői egyensúlyi egyenletek segítségével egyértelműen meghatározhatók; *statikailag határozott* szerkezeteknek nevezzük.

A nyugalomban lévő síkbeli tartóra ható aktív és passzív erők — terhelések és reakcióerők — egyensúlyban lévő síkbeli erőrendszert alkotnak. A reakcióerők meghatározásához három egyensúlyi egyenletet tudunk felhasználni ($\Sigma F_{ix} = 0$, $\Sigma F_{iy} = 0$, $\Sigma M_i = 0$). E három egyenlet csupán három ismeretlen meghatározásához elegendő, tehát statikailag határozott a tartó, hogyha a megtámasztások együttesen legfeljebb három ismeretlent jelentenek (47. ábra).

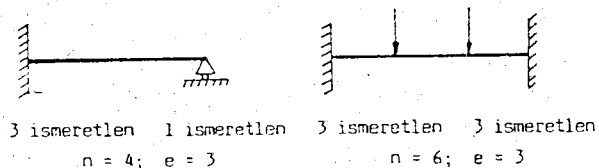


47. ábra

Statikailag határozott tartók

A befogott vagy konzolos tartó is statikailag határozott, mivel az ismeretlenek száma is és a felírható egyenletek száma is három.

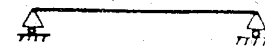
A *statikailag határozatlan* tartók esetén a felírható egyenletek száma kevesebb az ismeretlenek számánál. Ez a helyzet akkor következik be, hogyha a tartót olyan megtámasztások rögzítik, melyek együttvéve háromnál több ismeretlent képviselnek. Hogyha a megtámasztások együttesen n számú ismeretlent képviselnek, akkor a *határozatlanság fokszáma*: $n-3$. A 48. ábrán példaként statikailag határozatlan tartókat látunk.



48. ábra

Statikailag határozatlan tartók

Statikailag túlhatározottnak nevezzük azokat a szerkezeteket, amelyek csak speciális terhelés esetén maradnak nyugalomban, vagyis adott terheléshez az ismeretlenek meghatározhatók, de a terhelésre nézve feltételt kell szabnunk ahhoz, hogy statikai feladatról legyen szó (49. ábra).



49. ábra

Statikailag túlhatározott tartó

Összefoglalóan elmondhatjuk, hogy a szerkezet statikai hovatartozása az ismeretlenek számától (n) és a felírható független egyenletek számától (e) függ. A fentiek szerint, ha

$n < e$, akkor a szerkezet *túlhatározott*,

$n = e$, akkor a szerkezet *határozott*,

$n > e$, akkor a szerkezet *határozatlan*.

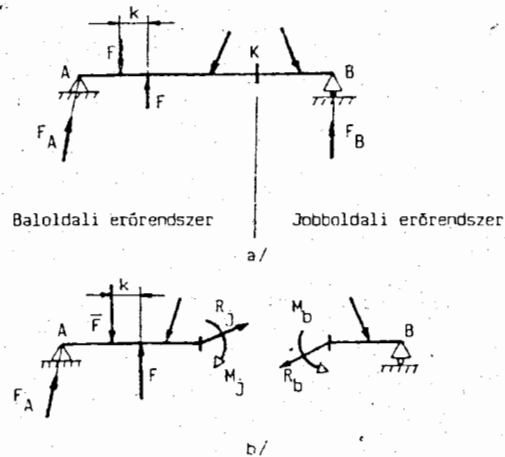
A tartókra ható *aktív* (terhelő) erőket és hatásukra a megtámasztásokon ébredő *passzív* (reakció)erőket együttesen *külső erőknek* nevezzük. A tartóra ható külső erőknek egyensúlyban lévő erőrendszert kell alkotniuk. Mivel a terhelőerőket ismerjük, a támasztóerőket statikai szempontból határozott tartók esetén az egyensúly feltételéből kiindulva szerkesztéssel számítással lehet meghatározni.

A terhelő erők a tartó valamely részén hatnak és a tanultak értelmében koncentrált vagy megoszló erőknek tekinthetők.

Nagyon fontos feladat annak eldöntése, hogy a terhelő erők milyen hatást gyakorolnak mind a tartókat alkotó rúd alakú testekre, illetve általánosságban valamely szerkezeti elem keresztmetszetére. Emiatt a *továbbiakban megvizsgáljuk, hogy adott terhelés esetén a rúd valamely keresztmetszetének milyen a terhelése, vagyis az igénybevétele*.

4.3. Az igénybevétel fogalma

A *testre ható külső erők hatására annak belsejében is erők keletkeznek és ezeket az erőket belső erőknek, vagy másnéven igénybevételnek is nevezzük*. A rúd terhelése tetszőleges lehet és a továbbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen a rúd valamely K keresztmetszetének igénybevétele (50. ábra). A K keresztmetszetben ébredő belső erők ismerete a keresztmetszeti méretek meghatározásához szükséges. Vágjuk el a tartót képzeletben a K pontnál és távolítsuk el a két részt egymástól. Az eltávolított baloldali tartórészre működő erők eredőjét baloldali eredőnek, a jobboldali tartórészre ható erők eredőjét pedig jobboldali eredőnek nevezzük. Sem a jobboldali, sem a baloldali tartórészre működő erők önmagukban nincsenek egyensúlyban, ha azonban a baloldali erők eredőjét hozzáadjuk a jobboldali tartórészen működő erőkhez (a jobboldali keresztmetszet súlypontjába redukáljuk), akkor egyensúlyi erőrendszert kapunk. Tehát a baloldali eredőt a jobboldali tartórészre kell vonatkoztatni, míg a jobboldali erők eredőjét a baloldali tartórészre. Mivel a baloldali és a jobboldali eredő magában foglalja a testre ható összes erőt, ezért a két eredőnek egyensúlyban kell lenni. Így elmondhatjuk, hogy általános esetben a baloldali és a jobboldali tartórészre ható erők eredője (R_b ; M_b és R_j ; M_j), vagyis a *belső erők* együttesen egyensúlyi erőrendszert alkotnak.



50. ábra: A tartó K keresztmetszetében ébredő erőhatások

Látható, hogy a keresztmetszet igénybevételét a redukció eredményeként egy eredő erő és egy eredő nyomaték jellemzi, melyeket a keresztmetszet súlypontjához kötötteknek tekintjük. Amennyiben a súlypontba redukált eredő erőt felbontjuk a keresztmetszet síkjára merőleges, illetve azzal párhuzamos összetevőre, akkor megkapjuk

- a *normális igénybevételt*, amit az N rúderő vagy másnéven normálerő okoz, illetve
- a *nyíróigénybevételt*, amit a T nyíróerő okoz (51. ábra).

A K keresztmetszet síkjába eső súlyponti tengelyre számított M_h nyomaték okozza a *hajlítói igénybevételt*.

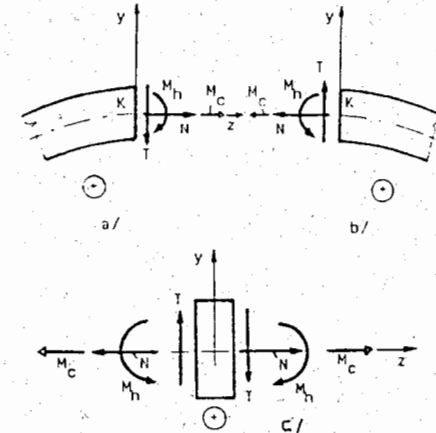
A mechanikai igénybevételnek teljessé tételéhez szükség van a *csavarói igénybevétel* tisztázására, amit a K keresztmetszet síkjára merőleges súlyponti tengelyre számított M_c nyomaték (csavarónyomaték) okoz.

A K jelű keresztmetszetbeli igénybevételeket a továbbiakban (megállapodás szerint) pozitív előjelűnek tekintjük, ha

- jobbról redukálva az 51.a,
- balról redukálva pedig az 51.b ábrának megfelelőek.

A két esetet összefoglalva mutatja az 51.c ábra, ahol a K keresztmetszet környezetéből kivágott elemi hosszúságú rúd végeire rajzoltuk fel a belső erőket. Az önkényesen választott előjelszabályt, az elemi rúdszakasz jelképes ábrázolásával, az 1. táblázat is mutatja. Látható, hogy a pozitív előjelű N rúderő a rúdszakaszt húzásra, a negatív előjelű pedig nyomásra veszi igénybe. Így elmondhatjuk, hogy a normál erő okozta igénybevétel két részre választható szét: *húzó* illetve *nyomó igénybevételre*. A csavaró igénybevétel előjelét egyszerűen úgy dönthetjük el, hogy amennyiben a rúd végével szembe nézünk és a nyomaték az óramutató járásával ellentétesen forog, akkor pozitív, különben pedig negatív. A nyíróigénybevétel akkor pozitív, ha a tartószakasz baloldali végén a rúdtengelyre merőleges erő

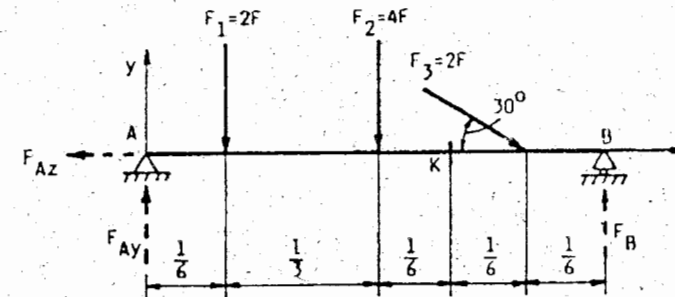
felfelé, a jobboldali tartóvégen pedig lefelé mutat (ellenkező esetben a nyíróigénybevétel negatív). A hajlítói igénybevételt pedig akkor tekintjük pozitívnak, ha a balról redukált nyomaték — ami a leggyakoribb eset — az óramutató járásával ellentétes értelmű, vagyis a tartó húzott szála felül helyezkedik el. Ez az előjelszabály értelemszerűen alkalmazható bonyolultabb rudaknál is.



51. ábra: A K jelű keresztmetszet pozitív igénybevételei

Az igénybevételek értéke általában keresztmetszetről keresztmetszetre más és más, vagyis a tartó hossza mentén változik. E változást írják le az *igénybevételi függvények*: $N(z)$, $T(z)$, $M_h(z)$, $M_c(z)$, ahol „ z ” a tartó hossza mentén mért távolság. Az igénybevételi függvények diagramjai az *igénybevételi ábrák*. Az igénybevételi ábrák alapján meghatározható a tartó veszélyes vagy mértékadó keresztmetszete. (Ezzel a szilárdságtan tárgyalásakor még találkozunk.)

A továbbiakban vizsgáljuk az 52. ábrán látható kéttámaszú tartó K jelű keresztmetszetének igénybevételét.



52. ábra: Koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó

Pozitív (+) előjel	Megjelölés	Negatív (-) előjel	Elnevezés
(húzás)	N	(nyomás)	Rúderő
(húzás)	M_C	(nyomás)	Csavarás
(húzás)	T	(nyomás)	Nyírás
(húzás)	M_h	(nyomás)	Hajlítás

1. táblázat
Előjelszabály

Először meg kell határozni az A illetve a B pontban ébredő reakcióerők nagyságát és irányát. Az A pontban a csuklós megtámasztás (álló saru) miatt csak annyit tudunk, hogy olyan reakcióerő ébred, melynek hatásvonala átmegy a csukló középpontján. Jelöljük az erő összetevőit a koordinátatengelyeknek megfelelően F_{Ay} -nal és F_{Az} -vel. A B pontban a mozgó saru miatt csak függőleges irányú F_B reakcióerő ébred, amit F_B -vel jelölünk. Ennek meghatározása céljából írjunk fel nyomatéki egyenletet az A pontra (pozitívnak tekintjük az óramutató járásával megegyező forgásirányt):

$$\Sigma M_i^{(A)} = 0 = 2F \frac{l}{6} + 4F \frac{l}{2} + 2F \sin 30^\circ \frac{5}{6}l - F_B l,$$

innen:

$$F_B = \frac{19}{6}F,$$

mivel az F_B pozitívra adódott, ezért értelme megegyezik a feltételezettel, vagyis felfelé mutat. Hasonlóképpen a B pontra felírt nyomatéki egyenletből meg tudjuk határozni az A pontban ébredő reakcióerő függőleges komponensét, az F_{Ay} -t:

$$\Sigma M_i^{(B)} = 0 = F_{Ay} l - 2F \frac{5}{6}l - 4F \frac{l}{2} + 2F \sin 30^\circ \frac{l}{6},$$

innen:

$$F_{Ay} = \frac{23}{6}F.$$

Az eredményből látható, hogy szintén a feltételezett irányba mutat. Az A pontban ébredő reakcióerő z tengely irányú komponensét vetületi egyenletből tudjuk meghatározni

$$\Sigma F_{iz} = 0 = -F_{Az} + 2F \cos 30^\circ,$$

ebből

$$F_{Az} = 1,732 F.$$

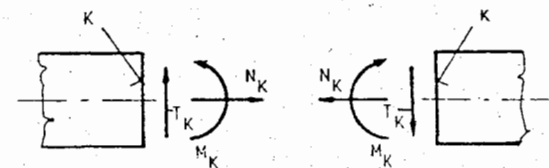
A reakcióerők ismeretében most már meghatározhatjuk a K keresztmetszet igénybevételeit (az 1. táblázat előjelszabályát használjuk):

$$N_K = F_{Az} = 1,732F,$$

$$T_K = F_{Ay} - F_1 - F_2 = \frac{23}{6}F - 2F = 4F = \frac{-13}{6}F,$$

$$M_{hK} = -F_{Ay} \frac{2}{3}l + F_1 \frac{l}{2} + 4F \frac{l}{6} = -\frac{23}{6}F \frac{2}{3}l + 2F \frac{l}{2} + 4F \frac{l}{6} = -\frac{8}{9}Fl.$$

A kapott eredményekből látható, hogy a normálerő húzást, a nyíróerő negatív nyíróigénybevételt és a hajlítónyomaték pedig negatív hajlítóigénybevételt okoz. Amennyiben a tartót a K keresztmetszetben szétválasztjuk és a fenti igénybevételeket ábrázoljuk, akkor az 53. ábrán látható eredményt kapjuk.



53. ábra

A tartó K jelű keresztmetszetének igénybevétele

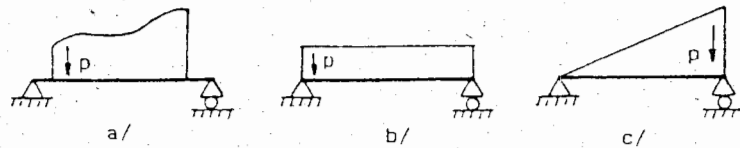
A bemutatott egyszerű példán tisztáztuk a tartó egy keresztmetszetének igénybevételét. A módszer bonyolultabb igénybevételek esetén tetszőleges tartótípusra értelemszerűen alkalmazható. A műszaki gyakorlatban azonban igen sokszor találkozunk olyan terhelésekkel, melyek nem egy helyen, hanem a szerkezeti elem bizonyos szakaszán hatnak. Ezeket meg-

oszló terheléseknek nevezzük és a következőkben néhány olyan alapfogalmat tisztázunk, melyek a szerkezeti elemek igénybevételeinek áttekintéséhez feltétlenül szükségesek.

4.4. A folytonosan megoszló síkbeli erőrendszer A megoszló terhelés fogalma

A valóságban koncentrált erő nem létezik, mivel a testre ható erő kisebb-nagyobb felületen adódik át. A merev test is idealizált fogalom, a szilárd testre ható erő pedig rajta alakváltozást (benyomódást) eredményez és így tulajdonképpen a koncentrált erő is felületen adódik át.

A leggyakrabban előforduló megoszló erő a tömegelő, mely szerkezeteinkre mindig hat. A megoszló erők jelölésére latin betűket (g, p, q , stb.) használunk és a rúd tengelyvonalára rajzolva ábrázoljuk (54. ábra), nagyságukat a rúd tengelyvonalának hosszegységére vonatkoztatjuk (N/m, kN/m, stb.). A megoszló erő nagysága (intenzitása) a tartó hossza mentén lehet állandó (54.b ábra) illetve változó (54.a, c ábra). A hossz mentén állandó nagyságú megoszló erőrendszert *egyenletesen megoszló erőrendszernek* nevezzük. A megoszló erőket csak a támaszerők meghatározásakor helyettesíthetjük eredőjükkel.

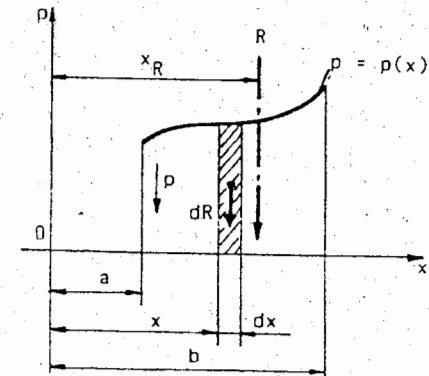


54. ábra
Megoszló erőrendszerek

A folytonosan megoszló párhuzamos síkbeli erők eredője

A folytonosan megoszló síkbeli erők intenzitásának változását a tartó hossza mentén a $p=p(x)$ függvénnyel írhatjuk le (55. ábra), az eredőjüket pedig az $[a, b]$ határok között számítás, illetve szerkesztéssel határozhatjuk meg.

Az 55. ábrán látható változó intenzitású megoszló erők eredőjét úgy tudjuk meghatározni, hogy az $[a, b]$ tartományban kiválasztunk egy dx hosszúságú szakaszt és feltételezzük, hogy a dx nullához tart, akkor az intenzitás nagysága állandónak tekinthető, az eredője a $dR=p \cdot dx$ összefüggés alapján számítható. Amennyiben a teljes intervallumot ily módon felbontjuk, akkor igen sok párhuzamos erőből álló erőrendszert kapunk. Ennek az erőrendszernek az eredőjét szerkesztéssel (pl. kötélszöggel) meg tudjuk határozni, számítás pedig a részeredőket összegezni kell és támadáspontjukat a nyomatéki tétel felhasználásával kereshetjük meg. Az erők összegzését integrálással az alábbiak szerint tudjuk elvégezni:



55. ábra
Folyamatosan megoszló párhuzamos síkbeli erők

$$R = \int_a^b p \, dx$$

A felírt integrálás elvégzése után az ábrán látható intenzitásgörbe alatti terület adódik. A nyomatéki egyenlet felhasználásával:

$$\Sigma M_i^{(0)} = \int_a^b x p \, dx = R x_R$$

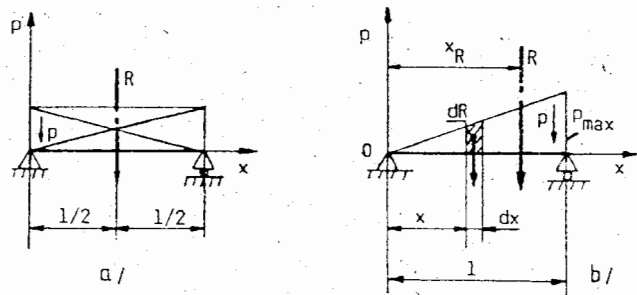
ahonnan:

$$x_R = \frac{\int_a^b x p \, dx}{R}$$

Az integrálással tetszőleges függvénykapcsolat szerint változó síkbeli, párhuzamos erőrendszer eredője meghatározható. A továbbiakban megvizsgáljuk a gyakorlat szempontjából két fontosabb esetet, amikor állandó nagyságú, egyenletesen megoszló erőrendszerrel (56.a ábra), illetve egyenletesen változó intenzitású erőrendszerrel (56.b ábra) állunk szemben.

Az egyenletesen megoszló síkbeli erők eredőjének nagysága a téglalap területével egyenlő ($R=pl$), hatásvonala pedig a téglalap átlóinak metszéspontján áthaladó függőleges egyenes.

A következőkben meghatározzuk a lineárisan változó, megoszló erőrendszer eredőjét (56.b ábra). A megoszló erő változásait a $p = \frac{p_{\max}}{l} x$ függvénykapcsolat írja le, melynek integrálásával tudjuk az eredő erő nagyságát (a háromszög területét) meghatározni:



56. ábra

Megoszló síkbeli erőrendszerek

$$R = \int_0^l \frac{p_{\max}}{l} x dx = \frac{p_{\max}}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{p_{\max} l}{2}$$

Ezután írjuk fel a megoszló erőrendszer nyomatékát az O pontra:

$$M^{(0)} = \int_0^l x \frac{p_{\max}}{l} x dx = \frac{p_{\max}}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{p_{\max} l^2}{3}$$

E nyomaték értéke megegyezik az erőrendszer eredőjének az O pontra számított nyomatékával:

$$M^{(0)} = \frac{p_{\max} l^2}{3} = R x_R$$

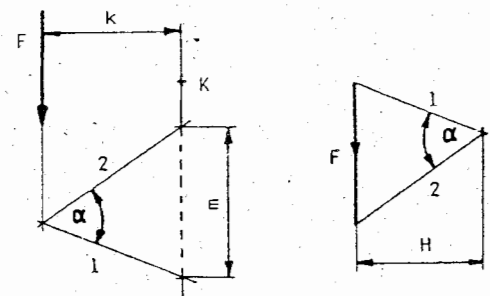
innen:

$$x_R = \frac{M^{(0)}}{R} = \frac{2 p_{\max} l^2}{3 p_{\max} l} = \frac{2}{3} l$$

Az eredményből látható, hogy a lineárisan változó, megoszló erőrendszer eredőjének függőleges hatásvonala, az O ponttól mérve, a tartó hosszának kétharmad részénél helyezkedik el. Az eddigi ismereteket felhasználva meg tudjuk határozni mindazon megoszló erőrendszerek eredőjének helyét, amelyek a fentebbi terheléstípusokból (lásd az 56. ábrán levőket) összetehetők (pl. trapéz). Természetesen a bonyolultabb függvénykapcsolatokkal leírható, változó intenzitású erőrendszerek eredőjének nagyságát és eredőjének elhelyezkedését is meg lehet határozni integrálással. Általánosságban elmondható, hogy az eredő nagysága az intenzitás-függvény alatti területtel egyenlő, hatásvonala pedig átmegy e terület súlypontján.

4.5. Kéttámaszú tartók igénybevételi ábrái

A tartók igénybevételi ábráit fel tudjuk építeni szerkesztéssel és számítással is. A nyomatéki ábrát szerkesztéssel egyszerűen meg lehet határozni. Ehhez azonban előzőleg meg kell ismerkednünk az F erőnek egy K ponton átmenő tengelyre ható nyomatékának szerkesztésével (57. ábra). (A szerkesztési módszer ugyanaz, mint amit a 36. ábrán egy eredő erő nyomatékának szerkesztésekor láttunk).



57. ábra

Az erő nyomatékának szerkesztése

Mérjük fel erőléptékben az F erőt és vegyük fel tetszőlegesen az O pólust, amit kössünk össze az erő kezdő és végpontjával, így megkapjuk a vektorsokszög 1-es és 2-es sugarát, majd az F erő hatásvonalából kiindulva szerkesszük meg a kötélsokszöget. A kötélágak metszik a K ponton áthaladó és az F erővel párhuzamos egyenest. A metszéspon-tok távolságát jelöljük m -mel, amit *nyomatéki metszéknek* nevezünk. Az O póluspontot és az erő vektorának merőleges távolságát (a pólustávolságot) jelöljük H -val, melyet hosszlép-tékben kell leolvasni. Mivel a vektorsokszögben és a kötélsokszögben az α szög megegye-zik, ezért írhatjuk, hogy

$$\frac{F}{H} = \frac{m}{k}$$

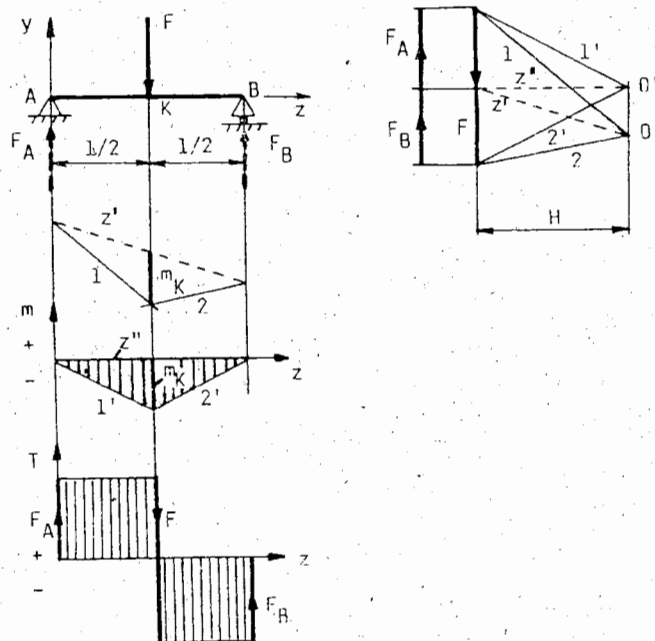
ahonnan $Fk = mH = M$, vagyis a nyomatéki metszék (m) és a pólustávolság (H) szorzata megadja az F erőnek a K ponton átmenő tengelyre számított nyomatékát. Mivel az O póluspontot tetszőlegesen vehetjük fel, ezért a H is változik a felvétel függvényében, így azt mondhatjuk, hogy a nyomatéki metszék (m) arányos a nyomatékkal és az arányossági tényező a pólustávolság (H).

A nyomaték szerkesztésének ismeretében hozzákezdhetünk a tartók igénybevételi ábráinak meghatározásához.

4.5.1. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartók

Egy koncentrált erővel terhelt tartó

Először megvizsgáljuk az 58. ábrán látható kéttámaszú tartót, melyre egyetlen koncentrált erő hat. Szerkesztéssel és számítással meghatározzuk a tartó igénybevételi ábráit. Erőléptékben mérjük fel az F erőt, majd vegyünk fel egy tetszőleges O pólust, melyből kiindulva kössük össze az erő kezdő- és végpontját, így megkapjuk az 1-es és 2-es jelű sugarakat. E sugarakkal az F_A reakcióerő hatásvonalából kiindulva szerkesztünk kötélsokszöveget.



58. ábra

Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételi ábrái

Mivel az F erő ismert, és tudjuk azt is, hogy a tartó az F , F_A , F_B erők hatására egyensúlyban van, ezért a két reakcióerőt e feltételből kiindulva meg tudjuk szerkeszteni, ugyanis egyensúly esetén a vektorsokszögnek is és a kötélsokszögnek is záródnia kell. Esetünkben a speciális alakú vektorsokszög záródik, mivel az F_A és F_B erők nagysága megegyezik az F nagyságával, csupán értelmük ellentétes. A kötélsokszög viszont akkor záródik, hogyha az F_A reakcióerő és az 1-es kötéloldal metszéspontját összekötjük az F_B reakcióerő és a 2-es kötéloldal metszéspontjával és kapjuk z' záróoldalt. Az O pontból kiindulva párhuzamos

kell húzni a kötélsokszög záróoldalával, ami metszi az F erőt és a metszéspont megadja az F_A és F_B reakcióerők nagyságát. Hogy melyik helyezkedik el a metszéspont alatt illetve felett, azt úgy tudjuk eldönteni, hogy felhasználjuk a kötélsokszög szerkesztésénél tanultakat. Ismert ugyanis, hogy a kötélsokszög és a vektorsokszög között kölcsönösség áll fenn, vagyis az F_B hatásvonala, a záróvonal (z') és a 2-es kötéloldal metszéspontjának a vektorsokszögben egy háromszög felel meg, amit a z' záróoldallal párhuzamos egyenes, a 2-es vektorsugar és az F_B reakcióerő határol. Így elmondhatjuk, hogy az F_B reakcióerő az F erő és a z' jelű egyenes metszéspontja alatt, az F_A pedig fölötte helyezkedik el, tehát szerkesztéssel meghatározhatjuk a támasztóerők nagyságát.

Amennyiben visszagondolunk az erő nyomatékának szerkesztésére (57. ábra), könnyen beláthatjuk, hogy az 1-es, 2-es és a z' egyenesekkel határolt kötélsokszögben függőleges metszések a nyomatékkal arányosak, vagyis a tartó hossza mentén a kötélsokszög függőleges metszékei keresztmetszetről keresztmetszetre megadják a nyomatékkal arányos metszékeket. A K jelű keresztmetszetben például az m_K ismeretében a nyomaték értékét az $M_K = m_K H$ összefüggés alapján számíthatjuk. Mivel az O póluspontot tetszőlegesen vehetjük fel, ezért a H nagysága változik. Mivel az igénybevételi ábrákat úgy rajzoljuk, hogy az igénybevételek előjelhelyes nagyságát a vízszintes egyenestől mérjük fel, ezért olyan kötélsokszöveget kell rajzolnunk, melynek záróoldala vízszintes. Ezt a reakcióerők ismeretében egyszerűen úgy vehetjük fel, hogy a vektorsokszögben az F erő és a z' egyenes metszéspontjából vízszintes egyenest húzunk (z'') és ez az O pontból induló függőleges egyenesen kimetszi az O' pólust, amit össze kell kötni az F erő kezdő és végpontjával, így megkapjuk az 1' és 2' sugarakat, melyek ismeretében meg tudjuk szerkeszteni a vízszintes záróoldalú kötélsokszöveget. Mivel a H pólustávolság ebben az esetben is ugyanaz, mint a ferde záróoldalú kötélsokszögben, ezért a nyomatéki metszékek megegyeznek a ferde és a vízszintes záróoldalú kötélsokszögben.

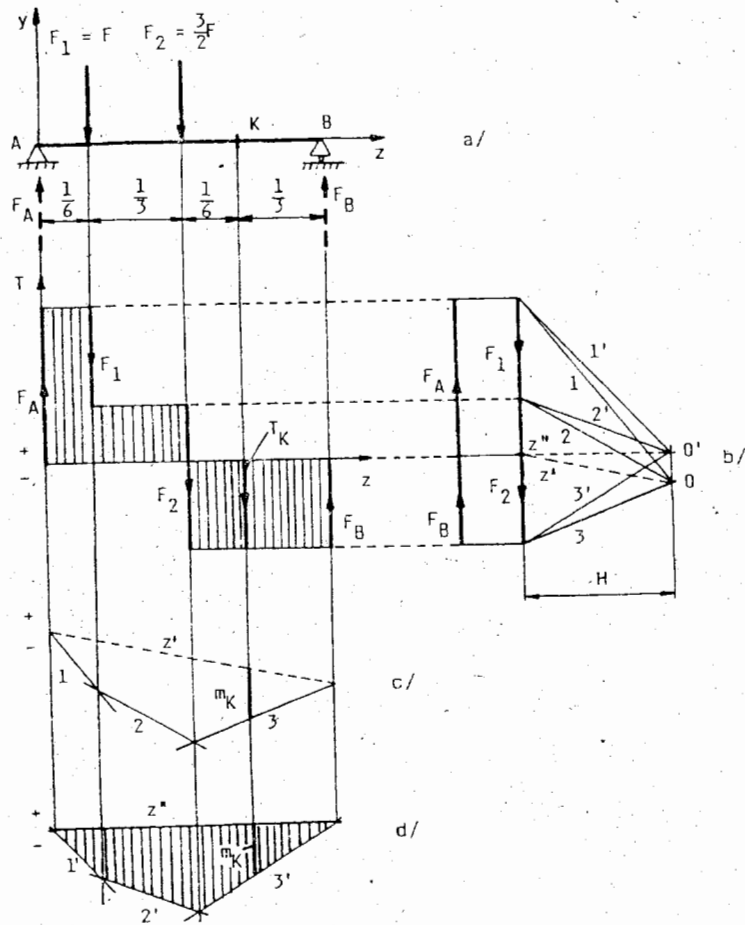
A nyíróerő ábrát úgy tudjuk megszerkeszteni, hogy a baloldali tartóvégéből kiindulva pontról pontra felmérjük a nyíróerő nagyságát az előjelszabálynak megfelelően. Tehát mivel az A pontban ébredő F_A felfelé mutat (a baloldali tartóvégén), ezért ez pozitív nyírást okoz. E nyíróerő az F erő támadáspontjáig állandó, ahol viszonyt a nyíróerő ábrában ugrás lép fel, mivel az F_A reakcióerő és az F erő vektori eredőjét kell képezni és az eredmény lefelé mutató erő lesz, ami a B pontig állandó, a B pontban pedig a nyíróerő ábrát az F_B reakcióerő zárja.

Az igénybevételi ábrákat ebben az esetben számítás révén nagyon egyszerűen meg tudjuk határozni. Az F_A és F_B reakcióerők az F erő nagyságának felével egyenlők, mivel középen hat a terhelés. A hajlítónyomaték a tartó két végén zérus, mivel nyomatékmentes az A és B pont. A tartó felezéspontjáig a nyomaték lineárisan változik és a K pontban pedig

$$M_K = M_{\max} = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

A nyíróerő ábra pedig az előbb elmondottak szerint a számított értékek alapján felrajzolható.

Két koncentrált erővel terhelt tartó



59. ábra

Koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó

A továbbiakban szerkesztéssel és számítással meghatározzuk az 59. ábrán látható, koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételi ábráit. Előzőleg azonban meg kell határozni az A és B pontban ébredő reakcióerők nagyságát. Mérjük fel egymásután, lépték-helyesen az \$F_1\$ és \$F_2\$ erőket. A két erővel a reakcióerők tartanak egyensúlyt, melyek értelme ismert, de nagyságuk nem. Meghatározásuk céljából egy O póluspont felvételével rajzoljuk meg a vektorsokszöget. A vektorsokszög 1, 2, 3-as jelű sugarainak felhasználásá-

val szerkesszük meg a kötélsokszöget (59.c ábra). Mivel egyensúly esetén a kötélsokszögnek is záródnia kell, ezért kössük össze a \$z'\$ záróvonallal a kötélsokszög kezdő- és végpontját, majd húzzunk párhuzamost a \$z'\$ záróvonal és az \$F_1, F_2\$ erők hatásvonalának metszéspontja az előző feladathoz (58. ábra) hasonlóan megadja az \$F_A\$ és \$F_B\$ reakcióerők nagyságát. A vízszintes záróoldalú kötélsokszöget (nyomatéki ábrát) az előző feladatban megismert módon tudjuk megszerkeszteni (59.d ábra). A nyíróigénybevételi ábrát a külső erők ismeretében egyszerűen megrajzolhatjuk (59.b ábra). Az igénybevételi ábráról leolvashatjuk egy tetszőleges K keresztmetszetben ébredő nyíróerőt (\$T_K\$) és a nyomatéki metszék alapján meghatározhatjuk a keresztmetszetben ébredő nyomatékot (\$M_K = m_K H\$).

Az igénybevételi ábrák *számítással* történő felépítéséhez meg kell határozni a reakcióerők értékét. Mivel az aktív és a passzív-erők párhuzamos erőrendszert alkotnak, ezért az ismeretlen reakcióerők \$F_A\$ és \$F_B\$ meghatározásához elegendő nyomatéki egyenletet felírni az A és B pontra (pozitívnek tekintjük azt a forgásirányt, amelyik az \$y\$ tengelyt a \$z\$ tengelybe forgatja):

$$\Sigma M_i^{(A)} = 0 = F \frac{l}{6} + \frac{3}{2} F \frac{l}{2} - F_B l,$$

innen:

$$F_B = \frac{11}{12} F \quad (\uparrow).$$

Hasonlóképpen:

$$\Sigma M_i^{(B)} = 0 = F_A l - F \frac{5}{6} l - \frac{3}{2} F \frac{l}{2},$$

ahonnan:

$$F_A = \frac{19}{12} F \quad (\uparrow).$$

Számításunkat úgy ellenőrizhetjük, hogy vetületi egyenletet írunk fel „y” irányban:

$$F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0,$$

helyettesítés után:

$$\frac{19}{12} F - F - \frac{3}{2} F + \frac{11}{12} F = 0,$$

tehát számításunk helyes volt.

A *nyíróerő ábrát* számítással úgy építhetjük fel, hogy a tartó hossza mentén balról jobbra haladva az \$F_A\$ reakcióerő „y” irányú komponensét (esetünkben csak az van) és a tartó hossz tengelyére merőleges erők vektori eredőjét képezzük és az így kapott nyíróerőt az előző szabályunknak megfelelően ábrázoljuk keresztmetszetről keresztmetszetre.

Például a K keresztmetszetben a nyírőerő értéke:

$$T_K = F_A - F_1 - F_2 = \frac{19}{12}F - F - \frac{3}{2}F = -\frac{11}{12}F.$$

A hajlítónyomatéki ábrát a reakcióerők ismeretében meg tudjuk határozni, figyelembe véve az előjelszabályt, vagyis azt, hogy amennyiben a húzott szál felül van, akkor az igénybevétel pozitív, ellenkező esetben pedig negatív. Így például a K keresztmetszetben a nyomaték értéke

$$M_K = F_A \frac{2}{3}l - F_1 \frac{1}{2} - F_2 \frac{1}{6} = \frac{19}{12}F \frac{2}{3}l - F \frac{1}{2} - \frac{3}{2}F \frac{1}{6} = \frac{11}{36}Fl.$$

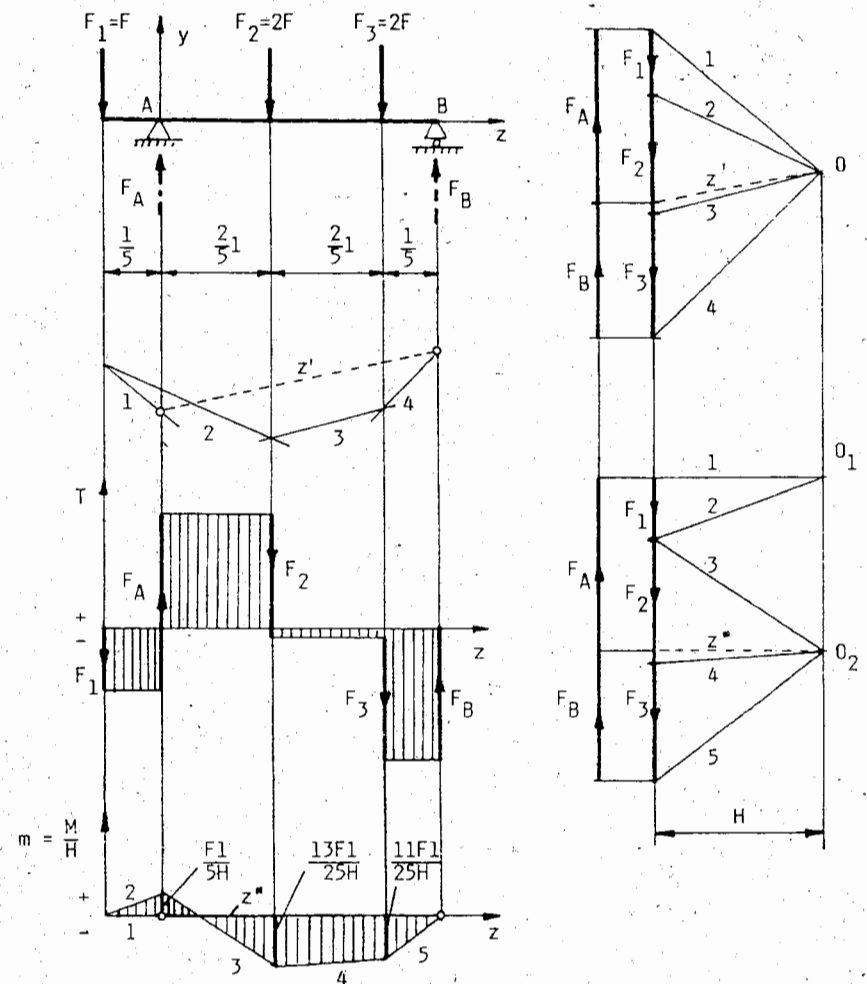
Ez olyan nyomatékokat eredményez, hogy a húzott szál alul van, tehát a K keresztmetszet igénybevétele negatív. Hasonlóképpen számítható bármelyik keresztmetszetben a nyomaték értéke és ábrázolható az igénybevétel.

Az igénybevételi ábrák vizsgálata alapján elmondhatjuk, hogy a koncentrált erő támaszpontjában a nyírőerő ábrának ugrása, a nyomatéki ábrának pedig törése van. A maximális hajlítónyomaték pedig ott ébred, ahol a nyírőerő ábra metszi a z tengelyt.

4.5.2. Koncentrált erőkkel terhelt konzolos tartó

Konzolos tartónak nevezzük azt a tartót, melynél az alátámasztás nem a tartó végén van (60. ábra). Esetünkben például az F_1 erő az A ponttól balra túlnyúló konzolos részen támad.

A tartó igénybevételi ábráinak szerkesztése céljából először meg kell határozni az A és B pontban ébredő reakcióerőket. Ezért adjuk össze az F_1 , F_2 , F_3 erőket, majd a kezdő- és végpontokat kössük össze az O pólussal. Ezután a vektorsokszög sugarainak segítségével szerkesszük meg a kötélsokszöveget, melynek indításánál figyelembe kell venni, hogy a vektorsokszögben az F_1 erő, valamint az 1-es és 2-es vektorsokszög sugara által határolt háromszögnek a kötélsokszögben egy pont felel meg. Ez azt jelenti, hogy az F_1 erő hatásvonalán az 1-es és 2-es kötéloldal egy pontban metszi egymást. Ezután a kötélsokszög szerkesztése a már megismert módon történik. Mivel a tartó a ráható erők hatására egyensúlyban van, ezért a kötélsokszögnek is záródnia kell, ami akkor következik be, hogyha az 1-es kötéloldal és az F_A hatásvonalának metszéspontját összekötjük a 4-es kötéloldal és az F_B reakcióerő hatásvonalának metszéspontjával. Ezáltal megkaptuk a z' záróoldalt, mellyel az O pontból kiindulva, párhuzamosot kell húzni és ez kimetszi az F_A és F_B erő nagyságát. A reakcióerők ismeretében meg tudjuk szerkeszteni a nyírőerő ábrát, mégpedig úgy, hogy a tartó baloldali végétől indulva felmérjük a nyírőerők nagyságát. A továbbiakban felmerül a kérdés, hogy miként tudunk vízszintes záróoldalt szerkeszteni. Ezt a reakcióerők ismeretében nagyon egyszerűen megtehetjük (60. ábra, jobb alsó szerkesztés). A szemléletesség kedvéért a szerkesztést két póluspont (O_1 , O_2) segítségével és ugyanolyan pólustávolsággal végeztük el. Eredményként a baloldali alsó ábrát kaptuk, melyben a jellegzetes metszékeket számítással is meg tudjuk határozni.



60. ábra

Konzolos kéttámaszú tartó igénybevételi ábrái

Számításainkhoz előzőleg ismerni kell a reakcióerők nagyságát, amit az A , illetve B pontra felírt nyomatéki egyenletekből tudunk meghatározni (pozitív forgásirányt tekintjük azt, hogyha az y tengely a z -be fordul el).

$$\sum M_i^{(A)} = 0 = -F_1 \frac{1}{5}l + F_2 \frac{2}{5}l + F_3 \frac{4}{5}l - F_B l = -F \frac{l}{5} + \frac{4}{5}Fl + \frac{8}{5}Fl - F_B l,$$

innen:

$$F_B = \frac{11}{5} F \quad (\uparrow).$$

Hasonlóképpen:

$$\Sigma M_i^{(B)} = 0 = -F_1 \frac{6}{5} l + F_A l - F_2 \frac{3}{5} l - F_3 \frac{1}{5} l = -\frac{6}{5} Fl + F_A l - \frac{6}{5} Fl - \frac{2}{5} Fl = 0,$$

innen:

$$F_A = \frac{14}{5} F \quad (\uparrow).$$

Számításunk helyességéről ellenőrzéssel is meggyőződhetünk:

$$\Sigma F_{iy} = -F_1 + F_A - F_2 - F_3 + F_B = -F + \frac{14}{5} F - 2F - 2F + \frac{11}{5} F = 0.$$

Mivel a tartóra ható külső erőrendszer teljes mértékben ismert, ezért meg tudjuk határozni a nyomatékokat, illetve a nyomatéki metszések nagyságát (a pozitív forgásirányt most a pozitív hajlítógénybevételnek megfelelően vesszük fel): az A jelű pontban:

$$M_A = F_1 \frac{1}{5} l = \frac{Fl}{5}, \text{ ill. } m_A = \frac{Fl}{5H} \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right)$$

Az F_2 támadáspontjában:

$$M_2 = F_1 \left(\frac{1}{5} l + \frac{2}{5} l \right) - F_A \frac{2}{5} l = -\frac{13}{25} Fl, \text{ ill. } m_2 = -\frac{13Fl}{25H} \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right)$$

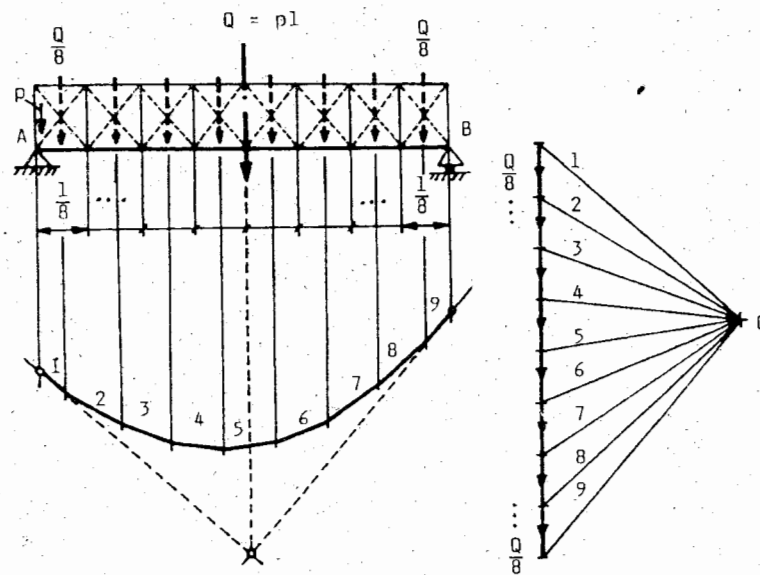
az F_3 támadáspontjában:

$$M_3 = F_1 \left(\frac{1}{5} l + \frac{2}{5} l + \frac{2}{5} l \right) - F_A \left(\frac{2}{5} l + \frac{2}{5} l \right) + F \frac{2}{25} l = -\frac{11}{25} Fl, \text{ ill. } m_3 = -\frac{11Fl}{25H} \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right)$$

A koncentrált erőkkel terhelt tartó igénybevételi ábráinak meghatározása után rátérünk a megoszló terhelésű tartók vizsgálatára.

4.5.3. Egyenletesen megoszló terhelésű tartó

Az idealizált koncentrált terhelés mellett nagyon gyakran kell megoszló terhelésű szerkezeteket vizsgálni. Itt is mindig felmerül az igénybevételi ábrák felépítésének szükségessége. Mielőtt azonban rátérnénk egy konkrét tartótípusra, vizsgáljuk meg, miként tudjuk megszerkeszteni egy megoszló terhelésű tartóhoz a kötélsokszöveget, vagyis a hajlítónyomatéki ábrát (61. ábra).



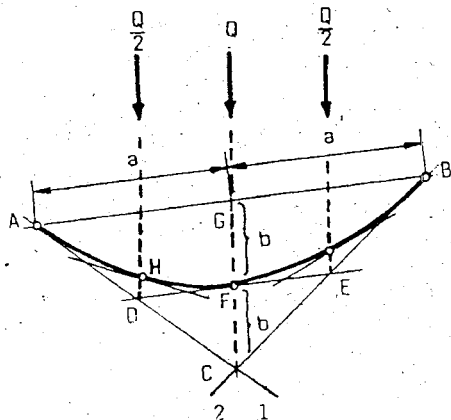
61. ábra

Kötélsokszög szerkesztés megoszló terhelésű tartónál

Az ábrán látható tartót osszuk nyolc egyenlő hosszúságú szakaszra, majd az egyes szakaszokon ható megoszló terheléseket helyettesítsük eredőjükkel ($Q_1 = Q_2 = \dots = Q_8 = \frac{pl}{8} = \frac{Q}{8}$). Ezután szerkesszük meg a vektorsokszöveget és utána a kötélsokszöveget. A kötélsokszögből látható, hogy az első (1) és az utolsó (9) kötéloldal a tartóra ható megoszló terhelés eredőjének hatásvonalán metsződik. Könnyen beláthatjuk azt is, hogyha minél több szakaszra osztjuk fel a tartót (az n -et minden határon túl növeljük), akkor a kötélsokszög oldalhosszúságai mind kisebbek lesznek, és eredményként egy görbét fognak leírni, melynek szélső érintői szintén az eredő hatásvonalán metsződnének. Egyenletesen megoszló terhelés esetén igazolható, hogy e görbe másodfokú parabola.

A másodfokú parabolát, a fentiek ismeretében, két pontbeli érintőjének segítségével könnyen megrajzolhatjuk és a szerkesztést mechanikussá tehetjük (62. ábra).

A parabola A és B pontbeli érintőjének (1-es és 2-es egyenes) C jelű metszéspontján megy át a megoszló terhelés eredőjének hatásvonala és a GC szakasz felezéspontjában (F) az AB szakasszal párhuzamos érintő. Ez az utóbbi érintő a D és E jelű pontban metszi az 1-es és 2-es érintőt. Felezzük meg az AD és DF szakaszt, majd felezéspontjukat kössük össze, így egy újabb érintőt kapunk, és az összekötő szakasz felezéspontjában (a Q/2 részre eső hatásvonalán) pedig a parabola egy újabb pontját (H). Az eljárás ismétlésével tetszőleges számú parabolapont és érintő szerkeszthető.



62. ábra
Parabola szerkesztése

A továbbiakban térjünk rá a 63. ábrán látható megoszló terhelésű tartó igénybevételi ábráinak felépítésére.

Az egyenletesen megoszló terhelést a támasztó erők meghatározása céljából helyettesítjük egyetlen erővel, az eredővel ($Q=pl$). Ezután szerkesztjük meg a vektorsokszöveget és rajzoljuk meg a kötelsokszöveget, melynek ismeretében (a z' záróoldal felhasználásával) ismertté válik az F_A és F_B reakcióerők nagysága, ami ebben az esetben

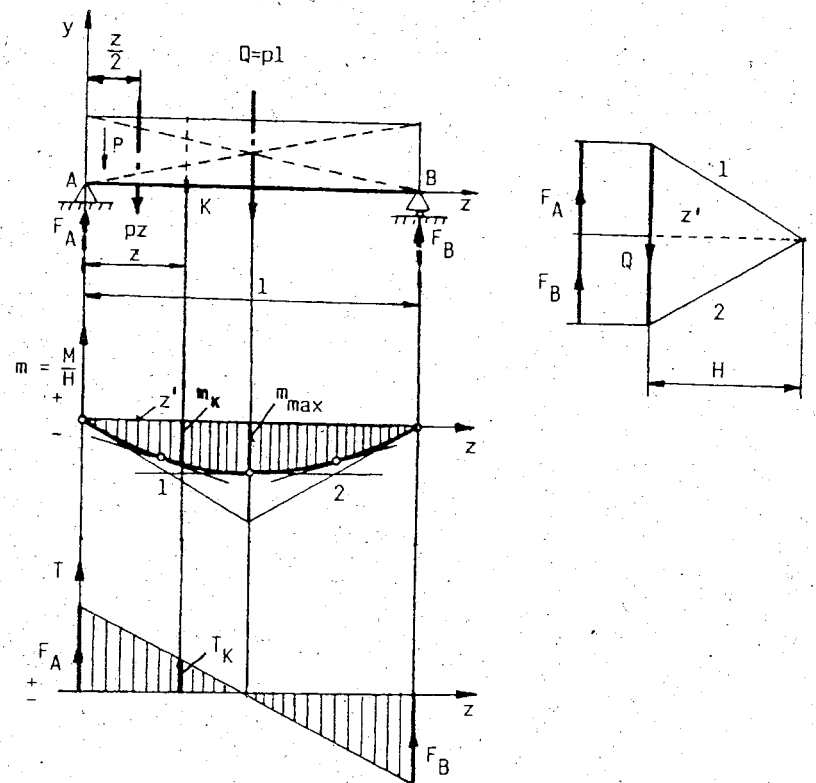
$$F_A = F_B = \frac{Q}{2} = \frac{pl}{2}$$

A kapott kötelsokszöveget ebben az esetben csak a reakcióerők meghatározásához tudjuk felhasználni. A nyomatéki ábra megszerkesztéséhez fel kell használni a 62. ábra kapcsán tanult, a parabola szerkesztéséhez szükséges ismereteket. Ily módon a megoszló terhelésű tartó nyomatéki ábráját már egyszerűen meghatározhatjuk.

Mivel szerkesztéssel a nyomaték értékével arányos metszketek kapunk, ezért a továbbiakban számítsuk ki a nyomaték tényleges értékét egy tetszőleges K jelű keresztmetszeten:

$$M_K = -F_A z + (pz) \frac{z}{2} = \frac{p}{2} (z^2 - lz)$$

Mivel a K keresztmetszetet tetszőlegesen vehetjük fel, ezért a felvétel függvényében a z jelű abszcissza értéke is változik és emiatt a nyomaték másodfokú függvénnyel (parabolával) írható le. (E terhelés hatására a tartó nyomott szála van felül, ezért a számított nyomaték az előjelszabálynak megfelelően negatív igénybevételt okoz). A továbbiakban számítsuk ki, hol ébred a maximális nyomaték. A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az első derivált zérus legyen:



63. ábra

Egyenletesen megoszló terhelésű tartó igénybevételi ábrái

$$\frac{dM}{dz} = 0 = \frac{p}{2} (2z - l),$$

innen:

$$z = \frac{l}{2},$$

adódik, vagyis a maximális nyomaték a tartó hosszának felénél ébred, értéke pedig:

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8}$$

A nyomatéki metszék értéke pedig az $M_{\max} = m_{\max} \cdot H$ alapján

$$m_{\max} = \frac{p l^2}{8H}$$

A továbbiakban írjuk fel egy tetszőleges K keresztmetszetben a nyíróerő nagyságát:

$$T_K = F_A - pz = \frac{pl}{2} - pz = p \left(\frac{l}{2} - z \right)$$

Látható, hogy a tartó hossza mentén lineárisan változik és egy olyan egyenest kapunk eredményül, amelyik a tartó felezéspontjában (az $l/2$ helyen) metszi a z tengelyt.

Ha összevetjük a nyíróerő és a nyomatéki ábrát, látjuk, ahol a nyíróerő ábra metszi a z tengelyt, ott a nyomatéki ábrának szélsőértéke (az igénybevétel szempontjából maximális értéke) van.

A továbbiakban vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor koncentrált erő és megoszló terhelés együttesen hat.

4.5.4. Vegyes terhelésű tartó

Vegyes terhelésűnek nevezzük a tartót, ha azt megoszló terhelés és koncentrált erő is terheli (64. ábra).

Az igénybevételi ábrák felépítése céljából először meghatározzuk az F_A és az F_B reakcióerők nagyságát az ismert kötélsokszög-szerkesztéssel. A ferde záróvonalú kötélsokszög mellett az O' pont felhasználásával megrajzoltuk a vízszintes záróoldalú kötélsokszöget is. A nyíróerő ábrát is az ismert módon szerkesztettük meg. Látjuk, hogy a nyomatéki ábrának ott van szélsőértéke (maximális értéke), ahol a nyíróerő ábra metszi a z tengelyt.

A nyomaték tényleges értékének (M), illetve a nyomatéki metszések számításához ismerni kell a reakcióerőket. Ebből a célból írjuk fel a nyomatéki egyenletet!

$$\Sigma M_i^{(A)} = 0 = F \frac{1}{5} l + 2F \frac{4}{5} l - F_B l,$$

innen:

$$F_B = \frac{9}{5} F \quad (\uparrow)$$

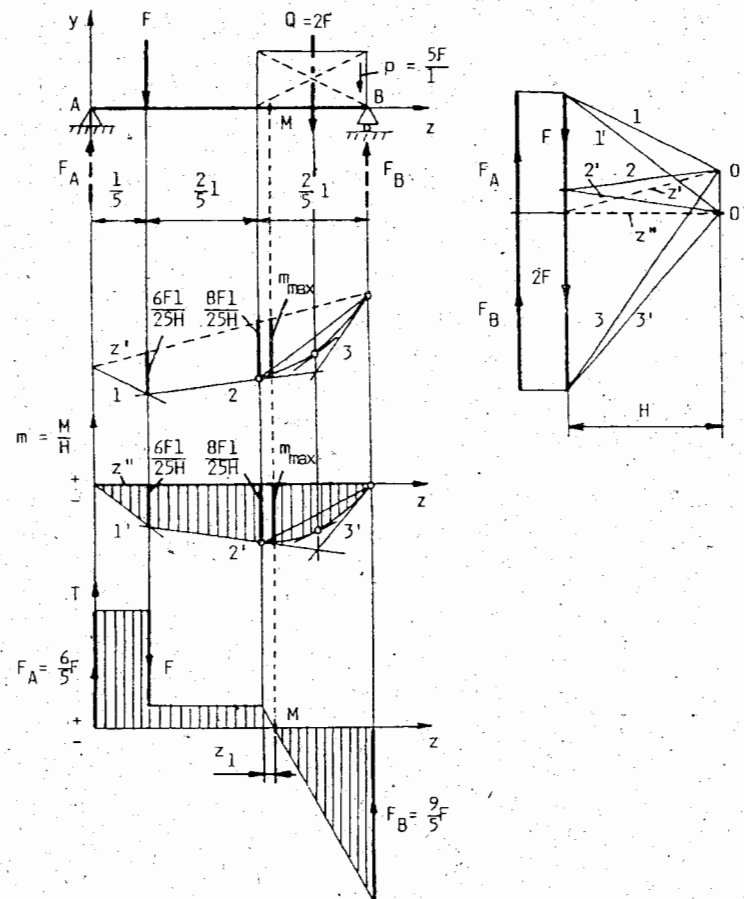
$$\Sigma M_i^{(B)} = 0 = F_A l - F \frac{4}{5} l - 2F \frac{1}{5} l,$$

ahonnan:

$$F_A = \frac{6}{5} F \quad (\uparrow)$$

A reakcióerők ismeretében ki tudjuk számítani a tartó hossza mentén, az egyes keresztmetszetekben ébredő nyomatékokat. (Néhány értéket a 64. ábrán látunk).

A továbbiakban meghatározzuk, hogy a nyíróerő ábra hol metszi a z tengelyt. Ebből a célból redukáljuk az M jelű keresztmetszettel balra levő nyíróerőket az M keresztmetszetbe, ahol a nyíróerő értéke (T_M) zérus.



64. ábra

A vegyes terhelésű tartó igénybevételi ábrái

$$T_M = F_A - F - pz_1 = \frac{6}{5} F - F - \frac{5F}{l} z_1 = 0,$$

innen:

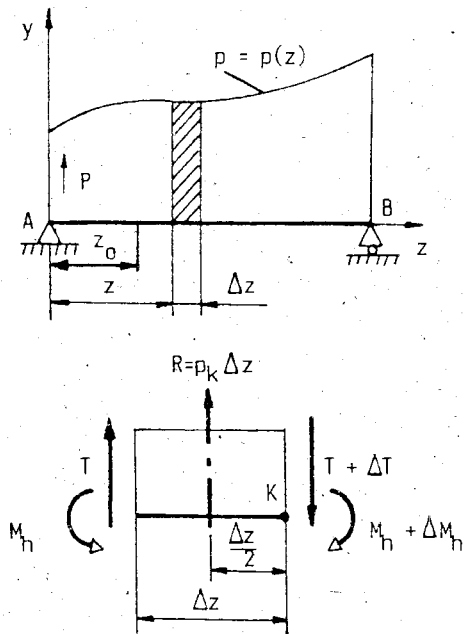
$$z_1 = \frac{1}{25} l.$$

A 64. ábráról látható az is, hogy mind a ferde, mind pedig a vízszintes záróoldalú kötélsokszögben, az azonos keresztmetszetekben, a nyomatéki metszések megegyeznek.

A következőkben vizsgáljuk meg az igénybevételeket leíró igénybevételi függvények közti összefüggéseket.

4.6. Összefüggések a tartó igénybevételi függvényei között

A továbbiakban összefüggéseket keresünk a 65. ábrán látható egyenes tengelyű, $p=p(z)$ intenzitású megoszló erőrendszerrel terhelt tartónál a megoszló terhelés intenzitása $p(z)$, a $T(z)$ nyíróerő és az $M_h(z)$ hajlítónyomaték között.



65. ábra

Megoszló terhelésű tartószakaszon ébredő erők

A tartóból kivágtunk egy Δz hosszúságú elemet és rárajzoltuk a külső megoszló terhelést, valamint az elvágási helyen a súlypontokba redukált belső erőrendszert. (A rúdelemnél a p_k a közepes intenzitást jelenti). A rúdelem a ráható erők eredményeként egyensúlyban van. Írjuk fel az y irányú vetületei egyenletet:

$$\Sigma F_{iy} = 0 = T - (T + \Delta T) + p_k \Delta z,$$

innen:

$$p_k = \frac{\Delta T}{\Delta z};$$

a $\Delta z \rightarrow 0$ határátmenet esetén

$$\frac{dT}{dz} = p(z),$$

azaz a nyíróerő z koordináta szerinti deriváltja egyenlő a megoszló erőrendszer intenzitásával.

Ezután írjuk fel a K ponton átmenő, a rajz síkjára merőleges tengelyre a nyomatéki egyenletet:

$$\Sigma M_i^{(K)} = M_h - (M_h + \Delta M_h) - T \Delta z - p_k \Delta z \frac{\Delta z}{2} = 0,$$

$$\Delta M_h = -T \Delta z - p_k \Delta z \frac{\Delta z}{2},$$

azaz

$$\frac{\Delta M_h}{\Delta z} = -T - p_k \frac{\Delta z}{2}.$$

A $\Delta z \rightarrow 0$ határátmenet esetén

$$\frac{dM_h}{dz} = -T(z),$$

és

$$\frac{d^2 M_h}{dz^2} = -\frac{dT}{dz} = -p(z).$$

Tehát tudjuk, hogy a hajlítónyomaték z koordináta szerinti deriváltja egyenlő a nyíróerő negatív értékével, illetve a hajlítónyomaték z koordináta szerinti második deriváltja egyenlő a megoszló erőrendszer intenzitásának ellentétes előjelű értékével. A gyakorlatban más előjelzés is előfordul, a lényeg azonban az, hogy amit választottunk, azt következetesen tartjuk be.

A nyíróerő deriváltjára kapott

$$dT = p(z) dz$$

összefüggést integráljuk a z_0 - z szakaszon:

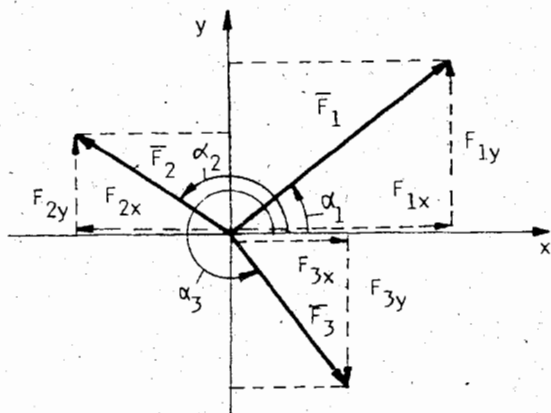
$$\int_{T_0}^T dT = \int_{z_0}^z p(z) dz,$$

illetve:

$$T - T_0 = \int_{z_0}^z p(z) dz,$$

ebből:

$$T = T_0 + \int_{z_0}^z p(z) dz.$$



16. ábra

Három erő felbontása merőleges komponensekre

Ily módon a három erőt helyettesítettük a hat darab komponensével. Mivel a szögek tartalmazzák a megfelelő térszögeket az érvényes előjelet, ezért az x és y irányba eső eredőt ($R_x=X$; $R_y=Y$) egyszerű algebrai összefüggéssel határozhatjuk meg:

$$X = \sum_{i=1}^3 X_i = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3,$$

$$Y = \sum_{i=1}^3 Y_i = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3.$$

Az eredő komponenseinek ismeretében számítható az eredő nagysága és állásszöge:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}.$$

Az X és Y előjeles mennyiségek, előjelüket az dönti el, hogy az α szög melyik térszögbe esik. Amennyiben a három erő egyensúlyi erőrendszert alkot, akkor az eredő (R) zérus.

1.5. Az erőrendszer egyensúlyának feltételei

Az előbbieken láttuk három, közös ponton átmenő erőrendszer egyensúlyának feltételét. Az erők vektorháromszögéből kitűnik, hogy egyensúly esetén az erőrendszer eredője zérus, vagyis

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0.$$

Az eredő tehát csak akkor lehet zérus, ha a gyök alatt lévő két pozitív tag mindegyike zérus, azaz

$$1. X = \sum X_i = 0,$$

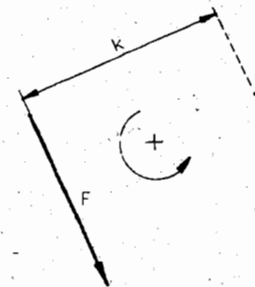
$$2. Y = \sum Y_i = 0,$$

Ennek alapján kimondhatjuk az egyensúly feltételét: közös ponton átmenő síkbeli erőrendszer egyensúlyban van, ha komponenseik összege külön-külön zérus.

Látható, hogy valamely közös ponton átmenő síkbeli erőrendszer egyensúlyát két egyenlet fejezi ki, ami azt is jelenti, hogy a vektorháromszögnek két egyenlet felel meg; tehát elmondhatjuk, hogy vektorsokszög szerkesztéssel csak olyan feladatokat oldhatunk meg, ahol az ismeretlenek száma legfeljebb kettő.

1.6. Az erő statikai nyomatéka

Az erő statikai nyomatékát valamely O ponton átmenő tengelyre úgy számítjuk ki, hogy az erő nagyságát (F) megszorozzuk a forgástengely és az erő hatásvonalára közti merőleges távolsággal, másnéven az erő „ k ” karjával (17. ábra):



17. ábra

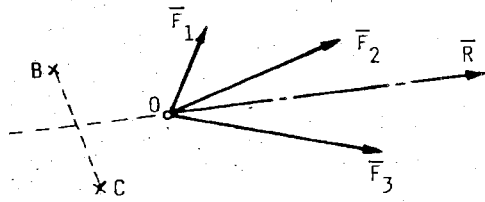
Az erő statikai nyomatéka

Az eredményből látható, hogy az erőnek a tengelyre számított (forgató)nyomatéka függ:

1. az erő nagyságától és
2. az erőnek a forgástengelytől mért merőleges távolságától.

Az erő tengelyre számított forgatónyomatékát az erő tengelyre számított statikai nyomatékának, vagy az erő tengelyre számított elsőrendű nyomatékának, vagy röviden tengelyre számított nyomatékának nevezzük. Jelölésére az M betűt használjuk, nagyságát pedig [Nm]-ben mérjük.

A statikában az erőnek a tengelyre számított nyomatékán kívül előfordul az erőnek pontra számított nyomatéka is. A tengelyre számított nyomaték skaláris mennyiség, a pontra számított pedig vektormennyiség. Az erő tengely körüli forgatónyomatékának határozott



20. ábra

Az erőrendszer nyomatéka

Az egyensúly feltétele tehát nyomatéki egyenletekkel az alábbiak szerint fogalmazható meg: ha a közös pontos átmenő síkbeli erők nyomatéka a sík két olyan pontján átmenő tengelyre (pl. B, C) zérus, mely pontok összekötő egyenese nem megy át az erők metszéspontján, akkor az erőrendszer egyensúlyban van. Az egyensúlyt tehát matematikailag az alábbi két nyomatéki egyenlet fejezi ki:

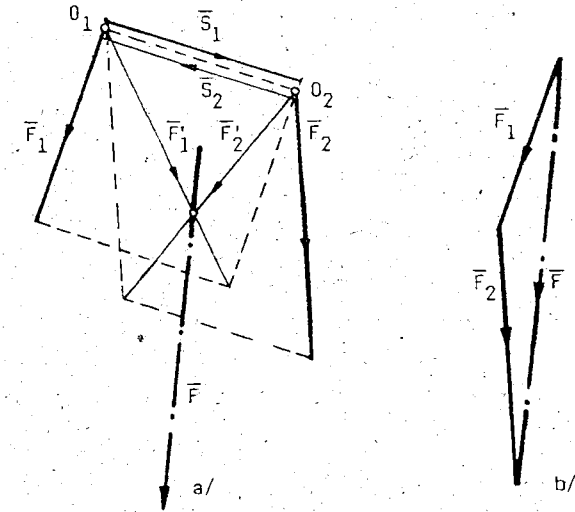
$$\sum M_i^{(B)} = 0 \text{ és } \sum M_i^{(C)} = 0.$$

A fenti két egyenlet azonban nem független a közös metszéspontú síkbeli erők egyensúlyára vonatkozó korábbi két egyenlettől ($\sum X_i = 0$; $\sum Y_i = 0$), mivel az egyensúlyt kifejező független egyenletek száma csupán kettő.

Ezért a közös metszéspontú síkbeli erők egyensúlyának számításakor vagy a komponensek egyensúlyára vonatkozó két egyenletet, vagy a nyomatékok zérus értékét kifejező két nyomatéki egyenletet, vagy pedig egy komponensekre és egy a nyomatékokra vonatkozó egyenletet használhatunk.

2. Párhuzamos síkbeli erőrendszer

Az erőparalelogramma segítségével olyan erők eredőjét tudjuk meghatározni, melyek metszéspontja a rajzlapunkon belül esik. E szerkesztésmódot közel párhuzamos illetve párhuzamos hatásvonalú erőknél azonban nem tudjuk alkalmazni, mivel a hatásvonalak a rajz síkján kívül ill. a végtelenben metsződnek. Mielőtt rátérünk a párhuzamos hatásvonalú erők vizsgálatára, előzőleg megszerkesztjük két közel párhuzamos hatásvonalú erő eredőjét (21. ábra). Az ábráról látható, hogy a két erő (F_1, F_2) metszéspontja a rajzlapon kívül esik.



21. ábra

Közel párhuzamos hatásvonalú erők eredője

A két erő eredőjét vektorháromszöggel (21.b ábra) meg tudjuk szerkeszteni, hogyha léptékhelyesen felrajzoljuk egymás után őket, így megkapjuk az eredő nagyságát.

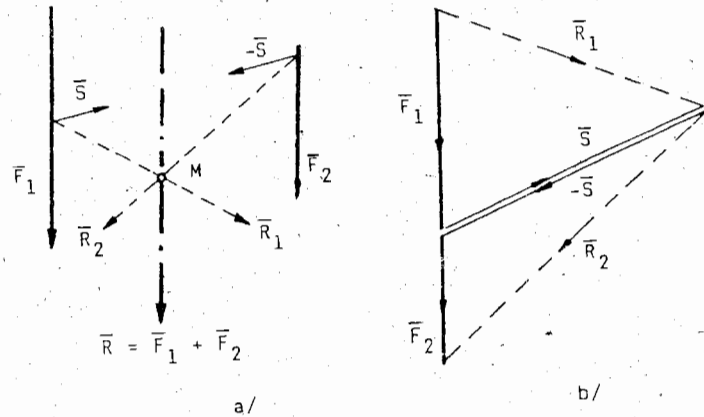
Most már ezzel az erővektorral kellene párhuzamosot húzni a két erő metszéspontján keresztül, de ez a rajzlapon kívül esik. Az eredő hatásvonalának megszerkesztése érdekében mérjük fel erőléptékben az F_1 és F_2 erőket az O_1 ill. az O_2 pontból kiindulva. A negyedik alaptétel értelmében a merev testet támadó erőrendszer hatása nem változik meg, hogyha hozzá egyensúlyban lévő erőrendszert adunk. Esetünkben ez az erőrendszer legyen az S_1, S_2 erő. Vektoraik nagysága legyen egyenlő az O_1O_2 távolsággal, hatásvonaluk közös, értelmük ellentétes. Az eredeti erőrendszerrel egyenértékű négy erő eredőjét ún. paralelogramma módszerrel külön-külön határozzuk meg. Először megszerkesztjük az F_1 és S_1 erő eredőjét, az F_1' -t, utána pedig az F_2 és S_2 erő eredőjét, az F_2' -t. Az eredeti erőrendszert

most már az \bar{F}_1 ' és \bar{F}_2 ' erőket helyettesítettük és metszéspontjukon keresztül az eredő erő (\bar{R}) hatásvonalával (21.b ábra) párhuzamost húzhatunk és erre felmérhetjük az \bar{R} erő nagyságát. A szerkesztést tehát ún. egyensúlyban lévő segéderőkkel el tudtuk végezni.

A bemutatott szerkesztés párhuzamos hatásvonalú erőkre is alkalmazható. A továbbiakban megvizsgáljuk, miként határozható meg két párhuzamos erő eredője, hogyha értelmük megegyező, illetve ellentétes.

2.1. Két párhuzamos hatásvonalú, megegyező értelmű erő eredője

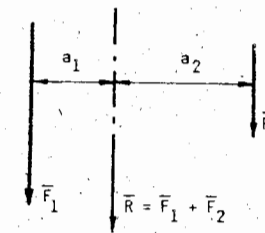
Vizsgáljuk meg, hogy a 22. ábrán látható két erőt (\bar{F}_1, \bar{F}_2) miként helyettesíthetjük az eredőjével. Az előző pontban megismert szerkesztési módszert alkalmazzuk itt is. A két erőből álló erőrendszerhez hozzáadjuk az egyensúlyban lévő $\bar{S}, -\bar{S}$ erőrendszert. Először megszerkesztjük az \bar{F}_1, \bar{S} erők eredőjét, az \bar{R}_1 -et (22.b ábra, felső erőháromszög), majd az \bar{F}_2, \bar{S} , az \bar{R}_2 -t (22.b ábra, alsó vektorháromszög). Ezután az \bar{F}_1, \bar{S} erők metszéspontjából párhuzamost húzunk az \bar{R}_1 erő hatásvonalával, majd az \bar{F}_2, \bar{S} erők metszéspontjából az \bar{R}_2 erő hatásvonalával. A két erővektor M jelű metszéspontján áthaladó, az eredeti erőrendszerrel (\bar{F}_1, \bar{F}_2) párhuzamos hatásvonalra ezután felmérhetjük erőléptékben megszerkesztett eredőt, az \bar{R} -et ($\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$).



22. ábra

Azonos értelmű, párhuzamos hatásvonalú erők eredője

Az eredő erő elhelyezkedését nemcsak szerkesztéssel, hanem számítással is meg tudjuk határozni, hogyha felhasználjuk a nyomatéki tételt, vagyis azt, hogy az eredő nyomatéka a sík bármely pontjára merőleges tengelyre egyenlő komponenseinek ugyanazon tengelyre számított nyomatékainak algebrai összegével. Esetünkben e pontot speciálisan vegyük fel az eredő hatásvonalán, majd a 23. ábra felhasználásával írjuk fel a nyomatékot:



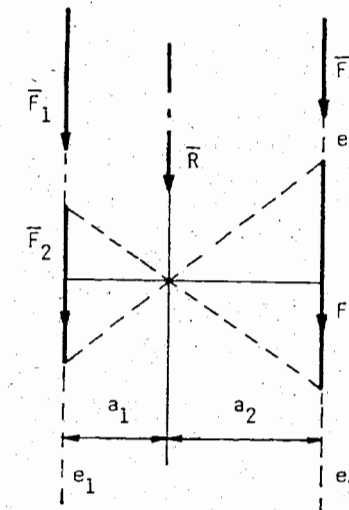
23. ábra

Párhuzamos hatásvonalú erők eredőjének számítása

$$-F_1 a_1 + F_2 a_2 = 0.$$

Mivel az eredő-szerkesztési feladatokban a két párhuzamos erő távolsága ismert, ezért a fenti egyenlet felhasználásával fel tudjuk osztani két részre (a_1, a_2) és így módon az eredő hatásvonalára ismertté válik. A fenti egyenletet felírhatjuk:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

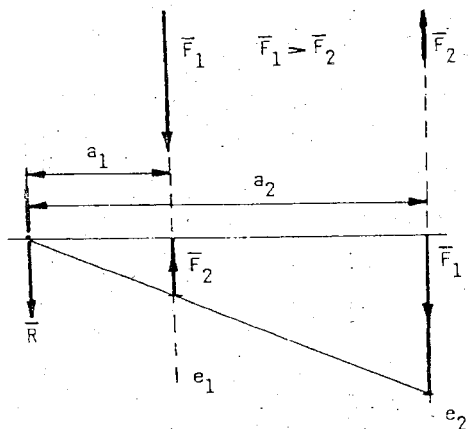


24. ábra

Párhuzamos hatásvonalú, egyező értelmű erők eredője

alakban is. Látható, hogy az eredő hatásvonalára a két erő közül a nagyobbikhoz közelebb helyezkedik el, vagyis az erők nagysága a hatásvonalától mért távolságukkal fordítottan arányos.

nyos. Ebből az eredményből adódik egy mechanikus szerkesztési módszer is, nevezetesen az, hogy az F_1 erő e_1 hatásvonalára erőléptékben felmérjük az F_2 erőt, az e_2 hatásvonalra pedig az F_1 erőt. Kössük össze az egyik erő végpontját a másik erő kezdőpontjával és fordítva. A két összekötő egyenes metszéspontja megadja az eredő hatásvonalának helyét (24. ábra). Ezután megszerkesztjük két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes értelmű erő eredőjét. Az eredő szerkesztését az előbbiekhez hasonlóan végezhetjük el, vagyis az e_1 hatásvonalra erőléptékben felmérjük az F_2 erő nagyságát, az e_2 -re pedig az F_1 nagyságát (25. ábra). Az erővektorok kezdő- és végpontjait összekötő egyenesek metszéspontja megadja az eredő hatásvonalának helyét. Az ábrából látható, hogy az eredő a két erő hatásvonalán kívül, a nagyobbik erőhöz közelebb helyezkedik el, nagysága pedig az összetevők nagyságának különbsége.



25. ábra

Ellentétes értelmű, párhuzamos erők eredője

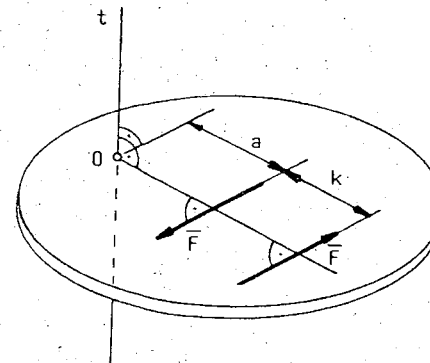
Amennyiben több párhuzamos hatásvonalú erővel állunk szemben, akkor az eredő helyét a nyomatéki tétel felhasználásával ki tudjuk számítani, a szerkesztését pedig a későbbiekben ismertetjük. Az előbbiekben ismertetett számítási és szerkesztési módszer felhasználásával elvezethető valamely erő párhuzamos komponensekre bontása is.

A továbbiakban megvizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor két erő hatásvonalja egymással párhuzamos, nagyságuk egyező és értelmük ellentétes.

2.2. Az erőpár

Két egyenlő nagyságú, párhuzamos hatásvonalú és ellentétes értelmű erőt együttesen erőpárnak nevezünk. Az erőpárt alkotó két párhuzamos erő egy síkot határoz meg, amit az erőpár síkjának nevezünk. Az erőpárra jellemző, hogy a komponensekre felírt egyensúlyi

egyenletek teljesülnek, de egyensúly még sincs, mert az erőpár a sík bármely pontjára nyomatékot fejt ki. Az erőpárban levő egyik erőt az erőpárt alapjának, a két erő távolságát pedig az erőpár karjának nevezzük. A továbbiakban vizsgáljuk meg az 26. ábrán látható erőpár tulajdonságait.



26. ábra

Az erőpár

Számítsuk ki az erőpár nyomatékút az O ponton átmenő t jelű tengelyre:

$$M = F(a+k) - Fa = Fk.$$

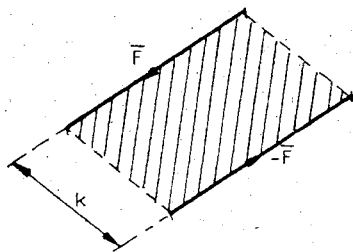
Az eredményből két fontos megállapítás következik:

1. Az erőpár nyomatéka a síkjára merőleges valamennyi tengelyre ugyanakkora. Könnyen belátható ugyanis, hogy a t tengelyt bárhol felvehetjük és így a nyomaték nagysága nem függ az "a" mérettől.
2. Az erőpár nyomatékát az egyik erőnek és az erők merőleges távolságának szorzata adja.

Az erőpárt a nyomaték jellemzi. Amennyiben a statikai nyomatékhoz hasonlóan erőléptékben ábrázoljuk az erőpár erőit, és hosszléptékben az erőpár karját, akkor az erőpár nyomatékát szemléletesen ábrázoljuk (27. ábra).

A sraffozott (paralelogramma) terület megadja az erőpár nyomatékát. A paralelogramma területét az erőpár irányában körüljárva a terület bal kezünk felé esik és a statikai nyomaték értelmezéséhez hasonlóan ez pozitív nyomatéknak felel meg. Az eddigi előjelszabály természetesen továbbra is érvényben marad.

Mivel az egy síkban fekvő erőpárok nyomatéka az erőpár alapjának és karjának szorzata, ezért könnyen belátható, hogy az erőpár forgató hatása változatlan marad, akárhová toljuk is el saját síkjában. Ugyancsak elmondhatjuk, hogy az erőpár forgató hatása a síkjára merőleges tengely közül akkor is változatlan marad, ha az erőpárt síkjával párhuzamosan toljuk el.



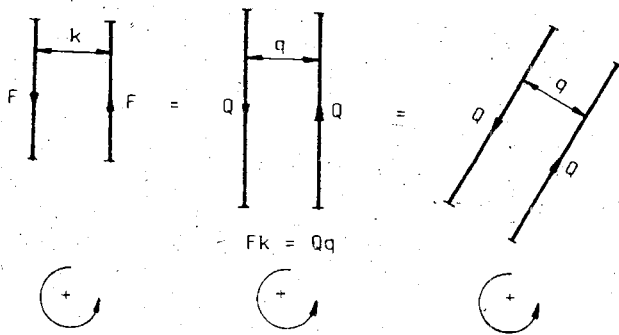
Hosszmérték: $1 \triangleq \ell$
Erőmérték: $1 \text{ cm} \triangleq \text{x.N}$

27. ábra

Az erőpár nyomatéka

Az erőpárnak valamely tengelyre számított nyomatéka előjeles mennyiség, ezért a közös síkú erőpárok akkor vannak egyensúlyban, ha nyomatékaik algebrai összege zérus. Ebből kifolyóan igazolható az is, hogyha a közös síkban vagy a párhuzamos síkban működő két erőpár nyomatéka egyenlő, akkor a két erőpár egymással egyenértékű.

Minden közös síkú erőpár egyenértékű, melynek nyomatéka és forgásértelme megegyezik. Ebből kifolyóan az erőpár átalakítható egyenértékű másik erőpárrá (28. ábra).



28. ábra

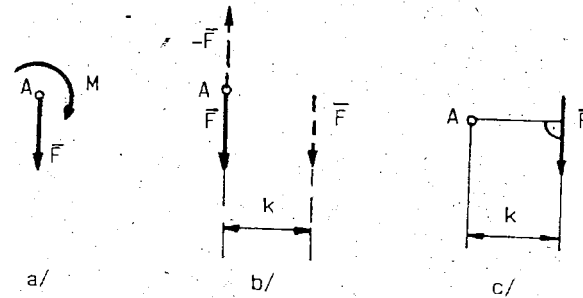
Egyenértékű erőpár

Az erőpár vektormennyiség, nyomatékvektorának jele: \vec{M} . Az erőpár a statika éppolyan alapfogalma, mint az erő. A merev testet erők és erőpárok is terhelhetik.

Az erőt és az erőpárt közös néven *dinámnak* nevezzük és ebbe a fogalomba a zérus nagyságú erőt is beleértjük, így a dinám lehet erő, erőpár és zéruserő.

2.3. Az erő és erőpár összetétele

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy egy \vec{F} erő és egy \vec{M} erőpár összetétele mit eredményez (29. ábra).



29. ábra

Erő és erőpár összetétele

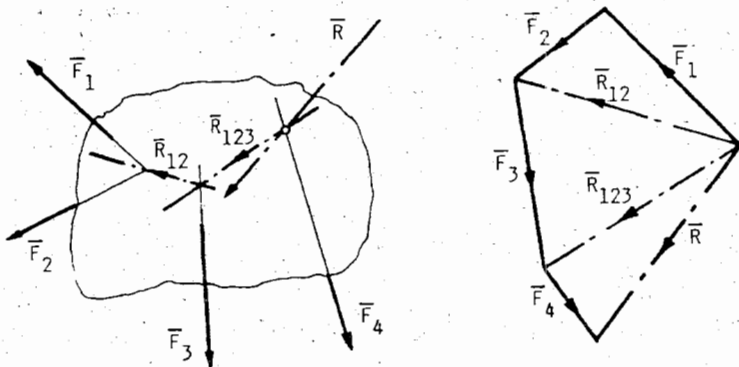
Az M erőpár bármely nagyságú erőpárral felírható, esetünkben azonban az alapot válasszuk F -nek. Ezután az erőpár karját (k) az $M=Fk$ összefüggésből számíthatjuk.

A második alaptétel értelmében a 29.b ábrán látható baloldali erőrendszer egyensúlyban van és ezért a negyedik alaptétel felhasználásával eltávolítható. Így tehát az F erő és az M nyomaték egyetlen erővel (F) helyettesíthető, mely nagyságra és irányra megegyezik az eredeti F erővel, azonban hatásvonala önmagával párhuzamosan és irányra megegyezik az eredeti F erővel, azonban hatásvonala önmagával párhuzamosan $k=M/F$ távolságra eltolódott, tehát az erőt annyival kell önmagával párhuzamosan eltolni, hogy nyomatéka az eredeti hatásvonal egy pontján átmenő tengelyre megegyezzen a hozzáadandó erőpár nyomatékával.

3. Általános síkbeli erőrendszer

3.1. Az eredő meghatározása közvetlen erőösszetétellel

A síkbeli erők eredőjét két erő esetén egyszerűen meg tudjuk határozni. Amennyiben kettőnél több szétszórt erővel állunk szemben, akkor ezt a szerkesztési módszert többször meg kell ismételni, vagyis a két erő eredőjéhez hozzá kell adni a harmadik erőt és így tovább (30. ábra).

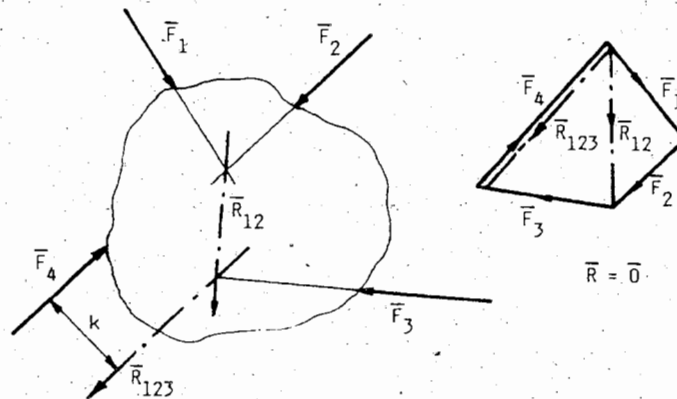


30. ábra

Szétszórt síkbeli erők eredőjének szerkesztése

Az ábrán látható módon a szerkesztést úgy végezzük el, hogy először léptékhelyesen felmérjük egymás után a 30.a ábrán levő merev testre ható \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erőket és meghatározzuk eredőjüket, az \vec{R}_{12} -t (30.b ábra), melyhez hozzáadjuk az \vec{F}_3 erőt és megkapjuk az \vec{R}_{123} részeredőt. Ehhez hozzáadjuk az \vec{F}_4 erőt és megkapjuk az eredő (\vec{R}) nagyságát és irányát. A továbbiakban az eredőt kell a merev testen elhelyezni. Ebből a célból meg kell keresni a merev testen az \vec{F}_1 , \vec{F}_2 erő metszéspontját, ahonnan párhuzamost kell húzni az \vec{R}_{12} részeredővel. A jobboldali vektorsokszög figyelembevételével ezután meg kell keresni az \vec{R}_{12} és az \vec{F}_3 erő metszéspontját, melyből kiindulva meg kell rajzolni az \vec{R}_{123} részeredővel párhuzamos egyenest, melynek az \vec{F}_4 erővel való metszéspontja megadja a merev testre ható eredő erő hatásvonalának egy pontját. A hatásvonalat az \vec{R} eredővel párhuzamosan húzzuk, melyre ezután fel tudjuk mérni az eredő nagyságát.

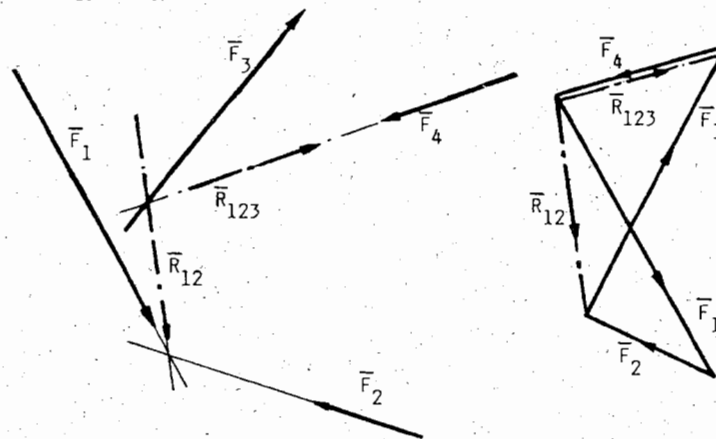
A szerkesztésből láttuk, hogy az erők helyettesíthetők egyetlen velük egyenértékű erővel, az eredővel. A továbbiakban vizsgáljuk meg, hogy milyen esetek fordulhatnak elő. A 31. ábrán az előzőekhez hasonlóan megszerkesztettük az erőrendszer eredőjét. A 31.b ábráról látható, hogy a vektorsokszög záródik, de mikor a merev testre felvisszük az \vec{R}_{123} részeredőt, látjuk, hogy ez az \vec{F}_4 erőtől „ k ” távolságra helyezkedik el, vele ellentétes értelmű és ennek az erőpárnak a nyomatéka az $M=Fk$ összefüggés alapján számítható.



31. ábra

Az erőrendszer eredője erőpár

A 32. ábrán levő szerkesztésből pedig adódik, hogy az \vec{R}_{123} részeredő az \vec{F}_4 hatásvonalára esik, vele egyenlő nagyságú és ellentétes értelmű, tehát a második alaptétel értelmében az erőrendszer egyensúlyban van.



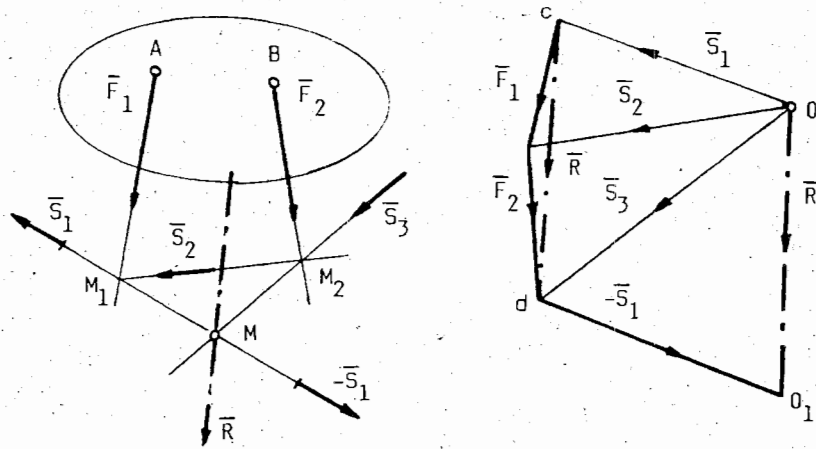
32. ábra

Egyensúlyi erőrendszer

A 31. és 32. ábráról látható, hogy a vektorsokszög zárt volta az egyensúlynak még nem elégséges feltétele, mivel az eredő erőpár is lehet.

3.2. Szerkesztés segéderőkkel

A 2. fejezetben láttuk, hogy a szerkesztés kissé bonyolultabbá válik, hogyha az erőrendszer erői a rajzlapunkon nem metszik egymást. Ebben az esetben segéderők felvételével tudjuk a szerkesztést elvégezni. Ennek menetét a 33. ábra ismerteti.



33. ábra

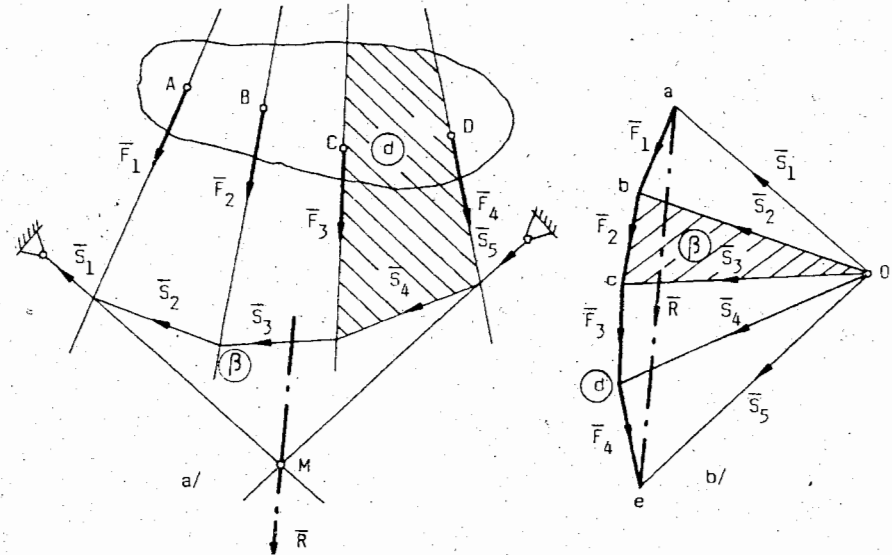
Eredő szerkesztése segéderőkkel

Az ábrán látható merev testen az A és B pontban az \vec{F}_1 ill. az \vec{F}_2 erő hat. Adjuk hozzá az erőrendszerhez az egyensúlyban levő \vec{S}_1 és $-\vec{S}_1$ segéderőket, ezzel az erőrendszer hatásán nem változtattunk. Ezután az \vec{F}_1 erőhöz adjuk hozzá az \vec{S}_1 erőt (31.b ábra), melynek eredményeként az \vec{S}_2 erőt kapjuk, ehhez az \vec{F}_2 erőt hozzáadva megkapjuk az \vec{S}_3 erőt. Mivel a merev testen ható erőrendszerhez egyensúlyi erőrendszert adtunk, ezért a \vec{S}_3 erőhöz még hozzá kell adni a $-\vec{S}_1$ erőt, így megkapjuk a négy erőből álló erőrendszer eredőjét, hogyha összekötjük az \vec{S}_1 erővektor O kezdőpontját a $-\vec{S}_1$ vektor végpontjával az O_1 -gyel. Ugyanerre az eredményre jutunk, hogyha az \vec{F}_1 vektor kezdőpontját (c) az \vec{F}_2 vektor végpontjával (d) kötjük össze. Ezután az erőrendszer eredőjét (\vec{R}) el kell helyezni a merev testen. Ebből a célból az \vec{S}_1 , \vec{F}_1 erő hatásvonalának M_1 metszéspontjából párhuzamost kell húzni az \vec{S}_2 erő hatásvonalával. E hatásvonal és az \vec{F}_2 erő hatásvonalának M_2 metszéspontjából párhuzamost kell húzni az \vec{S}_3 hatásvonalával. Az \vec{S}_1 , $-\vec{S}_1$ erők és az \vec{S}_3 erő hatásvonalának metszéspontja megadja azt az M pontot, melyen keresztül az \vec{R} eredő hatásvonalával (33.b ábra) párhuzamost húzva megkapjuk a merev testen ható eredő erő hatásvonalát és ezen el tudjuk helyezni az eredőt.

A bemutatott szerkesztési módszer általánosításával eljutunk az ún. kötélsokszög szerkesztéséhez.

3.3. Szerkesztés kötélsokszöggel

A 34. ábrán látható merev testen az $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ erők hatnak. Rajzoljuk fel az erők vektorábráját (34.b ábra) és így megkapjuk a *vektorsokszöget* vagy más néven vektorpoligont.



34. ábra

Kötélsokszög szerkesztése

A vektorsokszögtől jobbra vegyünk fel valahol egy O póluspontot. A póluspontot kössük össze a vektorok kezdő- és végpontjaival, ezeket az összekötő egyeneseket a vektorsokszög *sugarainak* nevezzük és sorrendben megfelelnek az $\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_5$ sugárerőknek. Ezután a merev testen ható erők hatásvonalait (34.a ábra) sorrendben metszésbe hozzuk a vektorsokszög sugaraival párhuzamos egyenesekkel. Először az \vec{S}_1 kötélerővel párhuzamos egyenessel messük az \vec{F}_1 erő hatásvonalát, majd a metszéspontból kiindulva húzzunk párhuzamost az \vec{S}_2 kötélerő hatásvonalával és így tovább. Végezetül az első (\vec{S}_1) és az utolsó (\vec{S}_5) kötélerő hatásvonalának M metszéspontjában megkapjuk az eredő erő hatásvonalának egy pontját. Ezen a ponton keresztül most már párhuzamost kell húzni az \vec{R} eredő hatásvonalával és megrajzolhatjuk az eredőt.

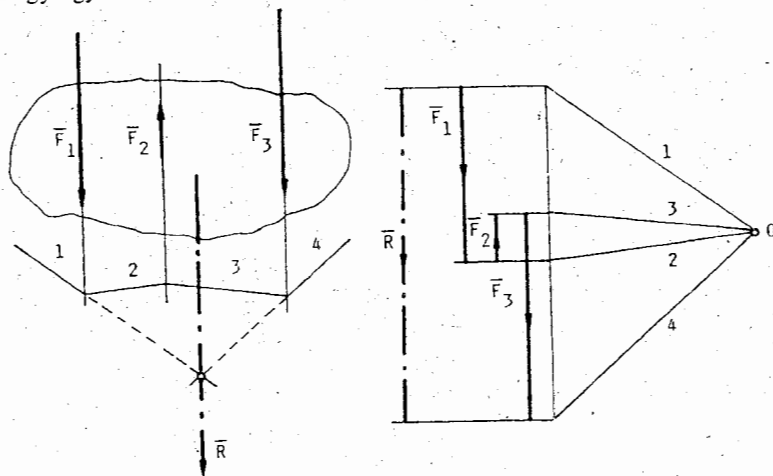
A merev testen ható erők ($\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$) hatásvonalát metsző $\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_5$ erők az ún. kötélsokszöveget határozzák meg. Az elnevezés onnan adódik, hogy a tökéletesen hajlékony kötélen az $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$ erők hatására az $\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_5$ kötélerők által meghatározott alakot veszi fel. Szemléletesség kedvéért a kötélsokszög két végét felfüggesztettük, így jól látható az egyensúlyi alak. Mivel az O pontot bárhol felvehetjük, ezért ebből következik, hogy végtelen

számú kötélsokszög tartozik a merev testre ható erőrendszerhez, ami azt jelenti, hogy a kötélnak végtelen egyensúlyi alakja van. Látható az is, hogy a vektorsokszög felvétele már meghatározza a kötélsokszög alakját.

Általánosságban elmondhatjuk, hogy a vektorsokszög és a kötélsokszög egymásnak megfelelő alakzatok, köztük reciprocitás (kölcsonösség) áll fenn:

- a kötélsokszög kötélerőinek a vektorsokszögben a vektorsugarak felelnek meg,
- bármelyik ábrán kiválasztunk egy pontban metsződő három egyenest, a másik ábra megfelelő vonalai háromszöget alkotnak, például a kötélsokszög β pontjának a vektorsokszög Obc háromszöge felel meg és a vektorsokszög d pontjának a kötélsokszög d jelű sraffozott háromszöge felel meg.

Alakja szerint a vektorsokszöget és a kötélsokszöget *nyitottnak* vagy *zártnak* nevezzük. Zárt vektorsokszög esetében az eredő zérus, míg zárt kötélsokszög esetén az első és utolsó kötéloldal egy egyenesbe esik.

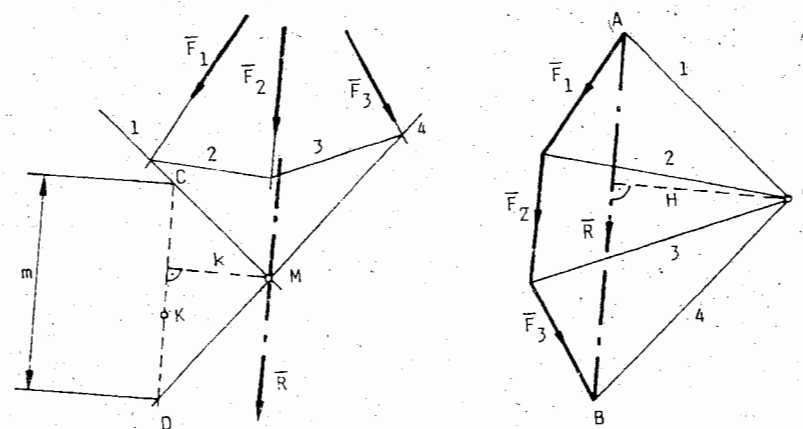


35. ábra

Párhuzamos hatásvonalú erőrendszer eredője

A megismert kötélsokszög szerkesztéssel egyszerűen meg tudjuk szerkeszteni a párhuzamos hatásvonalú erőrendszer eredőjét is (35. ábra). A szerkesztés lényege, hogy az erőrendszer erőivel párhuzamos hatásvonala mentén felmérjük az erőket és felvesszük az O pólust, majd a szerkesztést a tanultak szerint végezzük el. A szerkesztés olyannyira mechanikussá tehető, hogy nem szükséges a kötélerők irányát megadni és a hatásvonalakat a megkülönböztetés céljából elegendő csupán számozni.

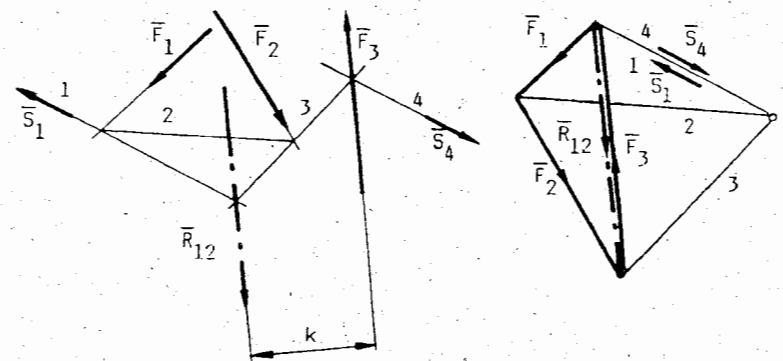
A kötélsokszög szerkesztést fel lehet használni az erőrendszer nyomatékának szerkesztésére is (36. ábra).



36. ábra

Az erőrendszer nyomatékának szerkesztése

Ismeretes, hogy az erőrendszer nyomatékát a K ponton átmenő tengelyre az $M=kR$ összefüggés alapján tudjuk meghatározni. Feladatunk, hogy e számítást geometriailag oldjuk meg. Célszerűségi okok miatt erőléptékben megszerkesztettük a 36.b ábrán látható vektorsokszöget, illetve hosszléptékben a 36.a ábrán látható kötélsokszöget. A K ponton keresztül párhuzamost húzunk az eredő hatásvonalával, ami metszi az 1-es és 4-es kötélerők hatásvonalát a C és D pontban, és a két párhuzamos egyenes távolsága megadja az eredőhöz tartozó erőkart. Mivel az OAB háromszög és az MCD háromszög hasonló, ezért írhatjuk, hogy $m:k=R:H$, ebből $mH=kR=M$. (A H távolságot pólustávolságnak nevezzük.)



37. ábra

Az erőrendszer eredője erőpár

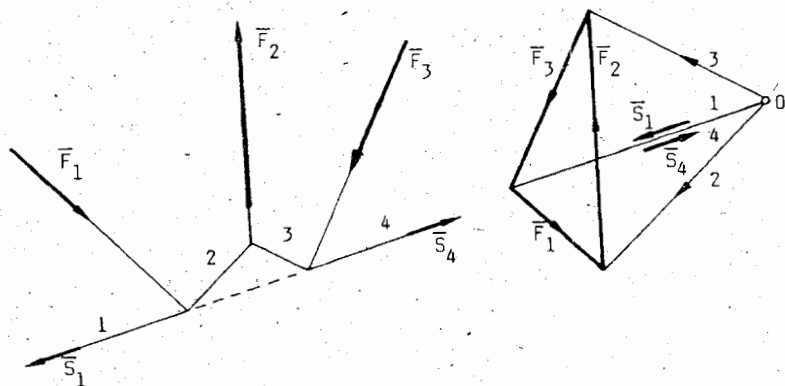
A kötélsokszög szerkesztésből ismeretes, hogy az O pólust tetszőlegesen felvehetjük (így a pólustávolság lehet 1, vagy a 10 valamely hatványa), ezért helyes választás esetén az m távolság megadja a nyomatékot.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a vektorsokszög ill. a kötélsokszög zárt vagy nyitott voltából az eredőre vonatkozóan milyen következtetéseket vonhatunk le.

A 37. ábrán látható erőrendszernek megszerkesztettük az eredőjét kötélsokszög módszerrel. A szerkesztésből látható, hogy a vektorsokszög zárt, ellenben a kötélsokszög nyitott (az \bar{S}_1 és \bar{S}_4 kötélérők hatásvonala párhuzamos). A vektorrendszer tehát az \bar{R}_{12} és az \bar{F}_3 erőből álló erőpár, melynek nyomatéka $M = kR_{12} = kF_3$. Elmondhatjuk, hogy ha a vektorsokszög zárt, a kötélsokszög pedig nyitott, akkor az erőrendszer eredője erőpár.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy egyensúly esetén mit mondhatunk el a vektorsokszögről ill. a kötélsokszögről.

Egyensúly esetén az eredőnek zérusnak és az erők nyomatékának a sík bármely pontján átmenő tengelyre szintén zérusnak kell lennie. Ilyen erőrendszert mutat a 38. ábra. Látható, hogy a síkbeli általános erőrendszer egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele, hogy mind a vektor-, mind a kötélsokszög zárt legyen.

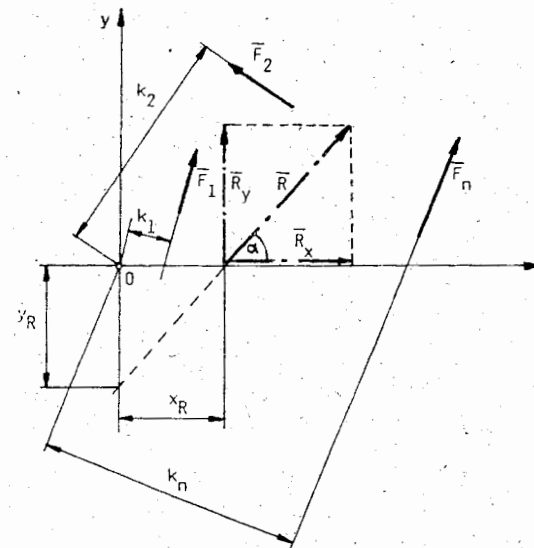


38. ábra
Egyensúlyi erőrendszer

3.4. A síkbeli általános erőrendszer eredőjének meghatározása számítással

Határozzuk meg a 39. ábrán látható általános helyzetű erőrendszer eredőjét. Tételezzük fel azt az általános esetet, amikor az eredő egyetlen erő. Az eredő vektorának komponenseit a két egymásra merőleges irányú vetületi egyenletből tudjuk meghatározni:

$$R_x = \sum F_{ix} \text{ és } R_y = \sum F_{iy}$$



39. ábra
Síkbeli erőrendszer eredőjének meghatározása

Mivel az erőrendszer és az eredő egymással egyenértékű, ezért elmondhatjuk, hogy az erőrendszer statikai nyomatéka ($M_i^{(0)}$) az O ponton átmenő tengelyre (az O pont tetszőleges lehet) megegyezik az eredő erő O pontra számított nyomatékával ($M_R^{(0)}$):

$$\sum M_i^{(0)} = M_R^{(0)}$$

A nyomatéki tétel értelmében az eredő erő nyomatéka egyenlő a komponensek nyomatékának előjeles összegével. Tudjuk továbbá, hogy az eredő hatásvonalán eltolható, ezért az x tengellyel való metszéspontig eltoljuk és ott komponenseire bontjuk, így írhatjuk, hogy

$$\sum M_i^{(0)} = x_R R_y,$$

innen

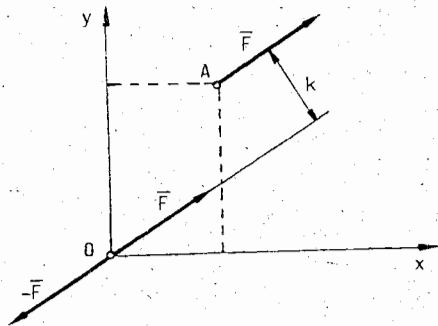
$$x_R = \frac{\sum M_i^{(0)}}{R_y}$$

Mivel a $\text{tg } \alpha = R_y/R_x$ összefüggésből az eredő erő állásszöge is számítható, ezért meg tudjuk határozni az y tengellyel való metszéspontját.

Az eredő erő helyzetét természetesen akkor is meg tudjuk határozni, hogyha az erőrendszer erőpárokat is tartalmaz.

3.5. Az erőrendszer pontra redukálása

Amikor az erőrendszert valamely hatásvonalán kívül eső pontba akarjuk áthelyezni (redukálni), akkor a 2.4. fejezetben ismertetett feladatot — az erő és erőpár összetételét — fordítva kell megoldani. Vizsgáljuk meg, miként redukálhatjuk a 40. ábrán látható \vec{F} erőt a koordinátarendszer kezdőpontjába, az O pontba. A negyedik alaptétel értelmében az erőrendszer hatása nem változik meg, hogyha hozzá egyensúlyi erőrendszert (\vec{F} , $-\vec{F}$) adunk, mely az O pontban hat és hatásvonaluk párhuzamos az \vec{F} erő hatásvonalával. Látható, hogy az A pontban támadó \vec{F} erő és az O pontban támadó $-\vec{F}$ erő erőpárt alkot, ami helyettesíthető nyomatékával, az $M = Fk$ -val. Az erőpárnál megismert szabályok értelmében az erőpár nyomatéka a sík bármely pontjába áthelyezhető, így az O pontba is. Az \vec{F} erő O pontba redukálásakor, tehát egy erőt és egy erőpárt kaptunk.



40. ábra
Az \vec{F} erő redukálása az O pontra

Általánosságban elmondható, hogy egy erő valamely pontra redukálásakor egy, az adott erővel egyenlő nagyságú erőt és egy erőpárt kapunk. Az erőpár nyomatéka egyenlő az adott erőnek a szóbanforgó ponton átmenő tengelyre számított nyomatékával.

Amennyiben az erőrendszer több erőből áll, akkor a redukálást minden egyes erőre el kell végezni és eredményként kapjuk a helyettesítő eredő erő

$$R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}$$

komponenseit — az eredő nagysága $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ —, valamint az erőrendszer nyomatékát:

$$M = \sum M_i.$$

Az általános síkbeli erőrendszer eredője általában tehát egy erő és egy erőpár. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a három független egyenlet milyen kombinációi fordulnak elő és mi a fizikai tartalmuk.

3.6. Síkbeli erőrendszerek különböző eseteinek vizsgálata

Valamely általános síkbeli erőrendszer vizsgálatához három egyenletre, két vetületi és egy nyomatéki egyenletre van szükség:

$$R_x = \sum F_{ix},$$

$$R_y = \sum F_{iy},$$

$$M = \sum M_i.$$

Eredő erő létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a két vetületösszeg közül legalább az egyik ne legyen zérus.

Az erőpár létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a két vetületösszeg zérus legyen, de a nyomatékösszeg zérustól különbözzön:

$$\sum F_{ix} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0,$$

$$\sum M_i \neq 0.$$

Az eredő erőpárt tehát a $\sum M_i = M_R$ egyenlet adja meg.

A síkbeli általános erőrendszer egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele, hogy a két vetületösszeg és a sík bármely pontján átmenő tengelyre számított statikai nyomaték zérus legyen:

$$\sum F_{ix} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0,$$

$$\sum M_i = 0.$$

A három egyenletből álló egyenletrendszer alapján három ismeretlen határozható meg. Minden olyan síkbeli statikai feladatot, melyben az ismeretlenek száma a felírható egyenletek számával egyenlő, statikailag határozott feladatoknak nevezzük.

A szétszórt síkbeli erők egyensúlyának feltételét csupán nyomatéki egyenletekkel is kifejezhetjük. Egyensúly esetén ugyanis az erők nyomatékának összege a sík bármely pontjára zérus, így végtelen sok nyomatéki egyenletet írhatunk fel, melyek azonban nem mind függetlenek egymástól. Az előbbiekből következik, hogy a síkbeli erők egyensúlyát három, egymástól független egyenlet fejezheti ki. Könnyen igazolható, hogy az általános síkbeli

erők egyensúlyát három, nem egy egyenesre eső ponton (A, B, C) átmenő tengelyre számított nyomatékösszeg zérus értéke fejezi ki:

$$\Sigma M_i^{(A)} = 0,$$

$$\Sigma M_i^{(B)} = 0,$$

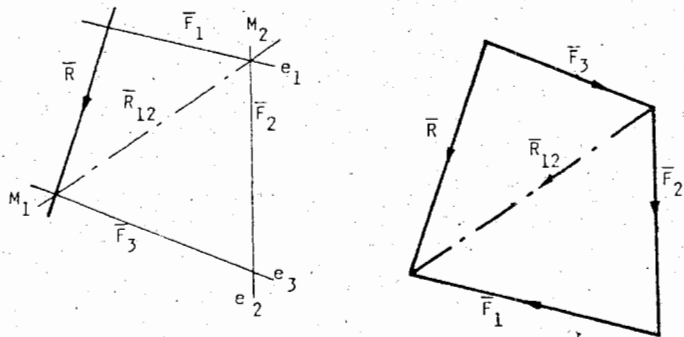
$$\Sigma M_i^{(C)} = 0.$$

3.7. Síkbeli erők felbontása három komponensre

A síkbeli erők felbontásakor három esetet különböztetünk meg: Az egyik, amikor a hatásvonalak az erő hatásvonalán metszik egymást, ebben az esetben végtelen sok megoldás lehetséges, a másik, amikor a hatásvonalak az erő hatásvonalán kívüli pontban metszik egymást, ebben az esetben a feladat értelmetlen. A probléma egyértelműen megoldható mind szerkesztő, mind számító eljárással, hogyha a három komponens nem megy keresztül egy ponton.

A Culmann-féle szerkesztés

A szerkesztés azon az elven alapszik, hogy az erő és két komponense egy közös ponton megy keresztül. A 41. ábrán látható \bar{R} erőt kell az e_1, e_2, e_3 hatásvonalon működő erőkre felbontani. Ebből a célból kétszer alkalmazzuk az erőnek két komponensre bontását. Első lépésként az e_1 és e_2 hatásvonalon működő \bar{F}_1 és \bar{F}_2 erőkomponenseket helyettesítjük eredőjükkel, az \bar{R}_{12} -vel. Az \bar{R}_{12} erő hatásvonalának a fentiek értelmében keresztül kell mennie a felbontandó erő (\bar{R}) hatásvonalának és az e_3 hatásvonal M_1 metszéspontján. Ezután az \bar{R} erőt fel kell bontani az e_3 hatásvonalon működő \bar{F}_3 erőre és az \bar{R}_{12} erőre (41.b. ábra). Mivel



41. ábra

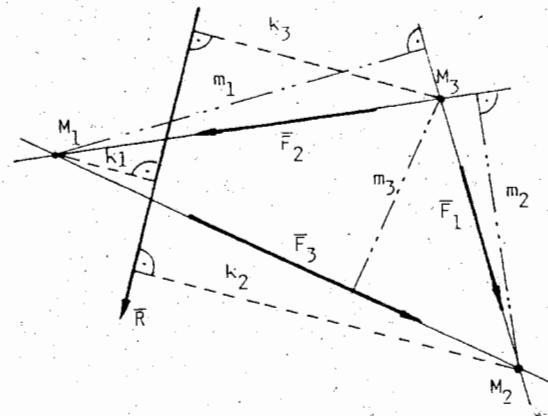
A Culmann-szerkesztés

az \bar{R}_{12} erő az e_1 és e_2 hatásvonalon működő erők eredője, ezért utolsó lépésként ezt az erőt kell felbontani a két hatásvonalon működő F_1 és F_2 komponensre. Ezzel a feladatot az ún. Culmann-szerkesztéssel megoldottuk.

A 41.b. ábráról látható, hogy a vektorsokszögben a komponensek nyílfolyma ütközik az adott erővel (\bar{R}), mivel ezt bontottuk fel három adott hatásvonalon működő erőre. A fentebb feladatot számítással is megoldhatjuk, a módszert a következőkben ismertetjük.

A Ritter-féle számító eljárás

A komponensek meghatározását három, nem egy egyenesre eső pontra felírt nyomatéki egyenlet segítségével oldjuk meg (42. ábra).



42. ábra

A Ritter-féle számító eljárás

A pontokat úgy kell célszerűen megválasztani, hogy azok mindig két ismeretlen erő hatásvonalának metszéspontjában legyenek, így két erőnek a nyomatéka erre a pontra zérus és az egyenletben csak egy ismeretlen szerepel.

Az ábrán látható \bar{R} erőt kell három olyan adott hatásvonalú erőre felbontani, melyek egymást páronként az M_1, M_2 és M_3 pontban metszik. Az \bar{R} erőnek a metszéspontokig mért távolságait k_1, k_2, k_3 -mal jelöltük, míg az egyes komponensek karjait m_1, m_2, m_3 -mal. Ezután felírjuk a nyomatéki tételt az egyes pontokra:

$$\text{Az } M_1 \text{ pontra: } -Rk_1 = -F_1m_1,$$

$$\text{az } M_2 \text{ pontra: } Rk_2 = F_2m_2,$$

$$\text{az } M_3 \text{ pontra pedig } Rk_3 = F_3m_3.$$

Az egyenletből az ismeretlen komponensek nagysága számítható:

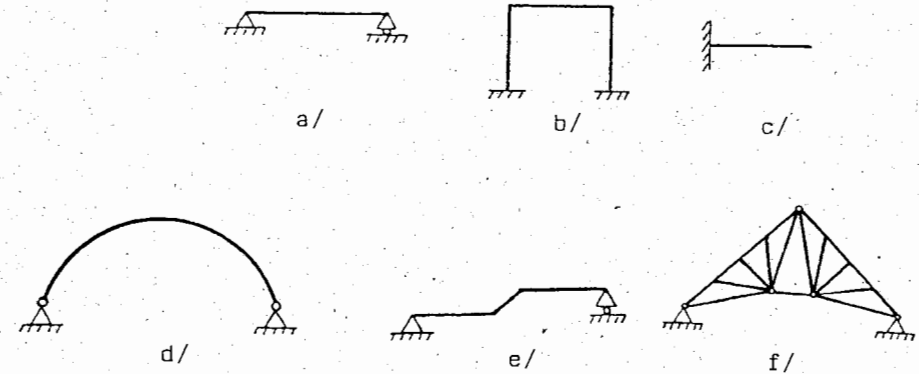
$$F_1 = \frac{Rk_1}{m_1}, \quad F_2 = \frac{Rk_2}{m_2}, \quad F_3 = \frac{Rk_3}{m_3}$$

Az erő három adott hatásvonalon működő komponensre bontásakor mind az erő, mind a komponens a vizsgált ponton átmenő tengelyre azonos értelmű nyomatékot ad, egyensúlyozáskor pedig az értelem ellentétes.

4. Síkbeli tartók

4.1. Alapfogalmak

A teherhordásra szolgáló szerkezeteket *tartószerkezeteknek* vagy röviden *tartóknak* nevezzük. A továbbiakban olyan tartókkal foglalkozunk, melyeknél a tartószerkezet és a tartóra ható erők egy közös síkban vannak, ezeket *síkbeli tartóknak* nevezzük. A síkbeli tartók alakjuk, keresztmetszetük, anyaguk szerint sokfélék lehetnek. A 43. ábrán néhány tartótípust látunk.



43. ábra
Síkbeli tartótípusok

Azokat a tartótípusokat, melyek egy merev testből állnak, *egyszerű tartóknak* (43.a, b, c, d, e), míg a több merev testből összekapcsolt szerkezetet *összetett tartóknak* (41.f) nevezzük. A tartókat alakjuk szerint felosztjuk *egyenesvonalú* (41.a, c), *törtvonalú* (41.e) és *ívelt* (41.d) tartókra.

A tartók jelentős része olyan kialakítású, hogy keresztmetszeti méreteik a hossz méretéhez viszonyítva kicsik.

Az olyan testet, melynek mérete egy meghatározott vonal mentén lényegesen nagyobb, mint a vonalra merőleges bármely irányban, *rúd*nak nevezzük. A következőkben a rudak legegyszerűbb fajtáját vizsgáljuk, amit prizmatikus rúdnak nevezünk. *Prizmatikusnak* akkor nevezzük a rudat, ha úgy származtatható, hogy egy egyenes szakasz mentén egy, az egyenesre merőlegesen álló síkidomot úgy tolnunk végig, hogy a síkidom súlypontja az egyenesen marad, és a síkidom az eltolás során nem fordul el. A síkidom által súrolt térrész a prizmatikus rúd. A síkidom a rúd *keresztmetszete*, az a vonal pedig, amelyen a síkidom súlypontja mozog, a rúd *súlyvonalának*, *tengelyvonalának* vagy *középvonalának* nevezzük.

A továbbiakban először a legfontosabb síkbeli tartótípusokat, a kéttámaszú és a befogott tartót vizsgáljuk, illetve foglalkozunk megtámasztási módjaikkal.

A tartók megtámasztásához használt szerkezeti elemeket *saruknak* nevezzük. A saru lehet *álló* vagy *mozgó* (44. ábra). A mozgó saru görgőkön mozdulhat el, amiből következik, hogy az ilyen megtámasztás csak a függőleges irányú elmozdulást akadályozza meg, vagyis csak függőleges irányú reakcióerőt képes kifejteni. A támasztóerő támadáspontja és hatásvonala ismert, ezért jellemzéséhez *egy adat*, az erő nagyságának megadása elegendő. Egyetlen csuklós rúddal helyettesíthető. Az *álló saru* vagy *csukló* olyan támasztó szerkezet, amely a rúd megtámasztott pontjának elmozdulásait megakadályozza, a rúd azonban e pont körül szabadon elfordulhat. Az álló saru a reakcióerő hatásvonalának csak egy pontját adja meg és a reakcióerőnek sem a nagysága, sem az iránya nem ismert. Az álló saru tehát két ismeretlent jelent és két csuklós végű rúddal helyettesíthetjük. A híd szerkezeteket a hőmérsékletváltozás miatt úgy alakítják ki, hogy az egyik végén alátámasztásuk álló saruval, a másik végén pedig mozgó saruval történik.

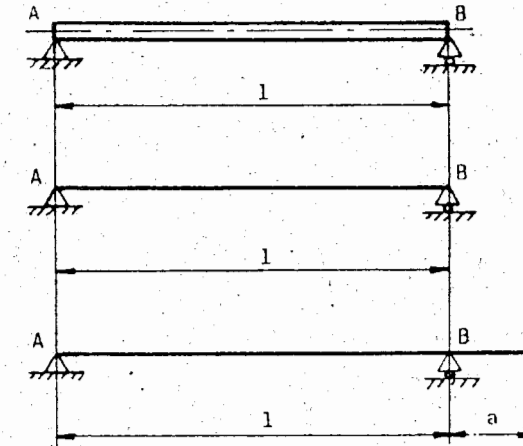
A megtámasztás neve	Vázlatos szerkezeti megoldás	Reakcióerők	Ismeretlenek száma	Jelképes ábrázolás	A megtámasztás megvalósítása rudakkal
Mozgó saru		F_A	1		
Álló saru		F_{AX} F_{AY}	2		
Befogás		F_{AX} F_{AY} M_A	3		

44. ábra
Síkbeli támasztó szerkezetek

A *befogás* a rúd befogott keresztmetszetének megakadályozza bármilyen irányú elmozdulását és elfordulását. Ennek megfelelően a befogás helyén nemcsak ismeretlen nagyságú és irányú erő, hanem még reakciónyomaték is ébred és ez akadályozza meg a befogás síkjában a keresztmetszet elfordulását.

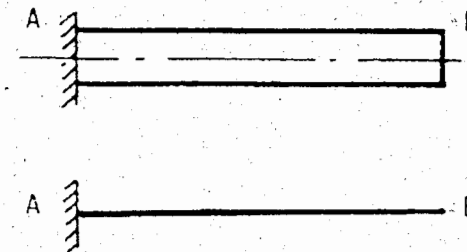
Tehát a befogás a számítások szempontjából három ismeretlent jelent és három csuklós rúddal pótolható.

A *kéttámaszú tartó* az egyik legegyszerűbb és leggyakrabban előforduló szerkezeti elem (45. ábra). A rúd egyik végén rendszerint csuklós, a másik végén pedig görgős alátámasztású. Az alátámasztások közötti szakaszt *nyílásnak*, *támaszköznek* vagy *fesz távolságnak*, míg az alátámasztáson túlnyúló részt konzolnak nevezzük. A gépészetben használatos tengelyek többnyire kéttámaszú tartónak tekinthetők.



45. ábra
Kéttámaszú tartó

A *befogott tartó* befogással rögzített prizmatikus rúd (46. ábra). Használatos a befalazott vagy konzolos tartó elnevezés is. A rúd bármilyen terheléssel szemben befogással is rögzíthető.

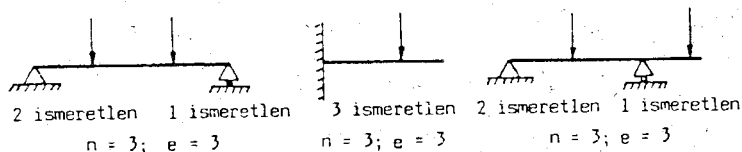


46. ábra
Befogott tartók

4.2. A statikai határozottság

A tartószerkezetek statikai szempontból határozottak vagy határozatlanok lehetnek. Azokat a tartószerkezeteket, melyek támasztóerői egyensúlyi egyenletek segítségével egyértelműen meghatározhatók, *statikailag határozott* szerkezeteknek nevezzük.

A nyugalomban lévő síkbeli tartóra ható aktív és passzív erők — terhelések és reakcióerők — egyensúlyban lévő síkbeli erőrendszert alkotnak. A reakcióerők meghatározásához három egyensúlyi egyenletet tudunk felhasználni ($\Sigma F_{ix} = 0$, $\Sigma F_{iy} = 0$, $\Sigma M_i = 0$). E három egyenlet csupán három ismeretlen meghatározásához elegendő, tehát statikailag határozott a tartó, hogyha a megtámasztások együttesen legfeljebb három ismeretlent jelentenek (47. ábra).

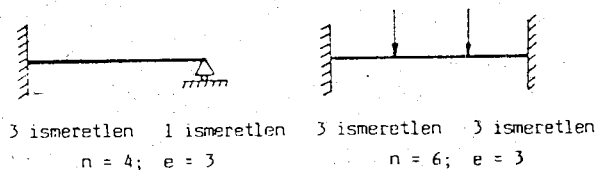


47. ábra

Statikailag határozott tartók

A befogott vagy konzolos tartó is statikailag határozott, mivel az ismeretlenek száma is és a felírható egyenletek száma is három.

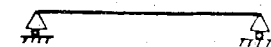
A *statikailag határozatlan* tartók esetén a felírható egyenletek száma kevesebb az ismeretlenek számánál. Ez a helyzet akkor következik be, hogyha a tartót olyan megtámasztások rögzítik, melyek együttvéve háromnál több ismeretlent képviselnek. Hogyha a megtámasztások együttesen n számú ismeretlent képviselnek, akkor a *határozatlanság fokozása*: $n-3$. A 48. ábrán példaként statikailag határozatlan tartókat látunk.



48. ábra

Statikailag határozatlan tartók

Statikailag túlhatározottnak nevezzük azokat a szerkezeteket, amelyek csak speciális terhelés esetén maradnak nyugalomban, vagyis adott terheléshez az ismeretlenek meghatározhatók, de a terhelésre nézve feltételt kell szabnunk ahhoz, hogy statikai feladatról legyen szó (49. ábra).



49. ábra

Statikailag túlhatározott tartó

Összefoglalóan elmondhatjuk, hogy a szerkezet statikai hovatartozása az ismeretlenek számától (n) és a felírható független egyenletek számától (e) függ. A fentiek szerint, ha

$n < e$, akkor a szerkezet *túlhatározott*,

$n = e$, akkor a szerkezet *határozott*,

$n > e$, akkor a szerkezet *határozatlan*.

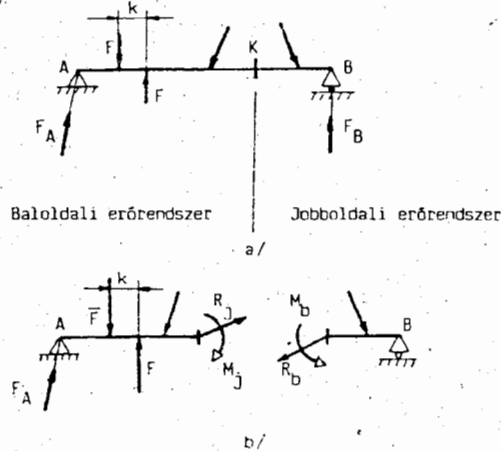
A tartókra ható *aktív* (terhelő) erőket és hatásukra a megtámasztásokon ébredő *passzív* (reakció)erőket együttesen *külső erőknek* nevezzük. A tartóra ható külső erőknek egyensúlyban lévő erőrendszert kell alkotniuk. Mivel a terhelőerőket ismerjük, a támasztóerőket statikai szempontból határozott tartók esetén az egyensúly feltételéből kiindulva szerkesztéssel számítással lehet meghatározni.

A terhelő erők a tartó valamely részén hatnak és a tanultak értelmében koncentrált vagy megoszló erőknek tekinthetők.

Nagyon fontos feladat annak eldöntése, hogy a terhelő erők milyen hatást gyakorolnak mind a tartókat alkotó rúd alakú testekre, illetve általánosságban valamely szerkezeti elem keresztmetszetére. Emiatt a *továbbiakban megvizsgáljuk, hogy adott terhelés esetén a rúd valamely keresztmetszetének milyen a terhelése, vagyis az igénybevétele*.

4.3. Az igénybevétel fogalma

A *testre ható külső erők hatására annak belsejében is erők keletkeznek és ezeket az erőket belső erőknek, vagy másnéven igénybevételnek is nevezzük*. A rúd terhelése tetszőleges lehet és a továbbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen a rúd valamely K keresztmetszetének igénybevétele (50. ábra). A K keresztmetszetben ébredő belső erők ismerete a keresztmetszeti méretek meghatározásához szükséges. Vágjuk el a tartót képzeletben a K pontnál és távolítsuk el a két részt egymástól. Az eltávolított baloldali tartórészre működő erők eredőjét baloldali eredőnek, a jobboldali tartórészre ható erők eredőjét pedig jobboldali eredőnek nevezzük. Sem a jobboldali, sem a baloldali tartórészre működő erők önmagukban nincsenek egyensúlyban, ha azonban a baloldali erők eredőjét hozzáadjuk a jobboldali tartórészre működő erőkhez (a jobboldali keresztmetszet súlypontjába redukáljuk), akkor egyensúlyi erőrendszert kapunk. Tehát a baloldali eredőt a jobboldali tartórészre kell vonatkoztatni, míg a jobboldali erők eredőjét a baloldali tartórészre. Mivel a baloldali és a jobboldali eredő magában foglalja a testre ható összes erőt, ezért a két eredőnek egyensúlyban kell lenni. Így elmondhatjuk, hogy általános esetben a baloldali és a jobboldali tartórészre ható erők eredője (R_b ; M_b és R_j ; M_j), vagyis a *belső erők* együttesen egyensúlyi erőrendszert alkotnak.



50. ábra: A tartó K keresztmetszetében ébredő erőhatások

Látható, hogy a keresztmetszet igénybevételét a redukció eredményeként egy eredő erő és egy eredő nyomaték jellemzi, melyeket a keresztmetszet súlypontjához kötötteknek tekintjük. Amennyiben a súlypontba redukált eredő erőt felbontjuk a keresztmetszet síkjára merőleges, illetve azzal párhuzamos összetevőre, akkor megkapjuk

- a *normális igénybevételt*, amit az N rúderő vagy másnéven normálerő okoz, illetve
- a *nyíróigénybevételt*, amit a T nyíróerő okoz (51. ábra).

A K keresztmetszet síkjába eső súlyponti tengelyre számított M_h nyomaték okozza a

- *hajlítói igénybevételt*.

A mechanikai igénybevételnek teljessé tételéhez szükség van a

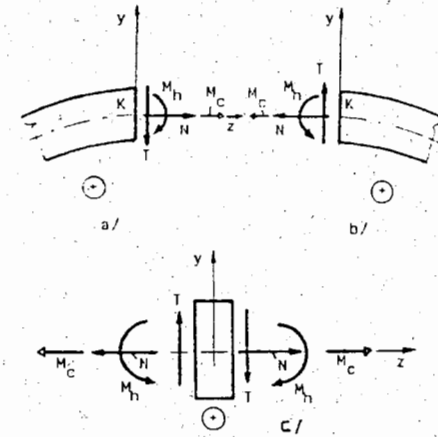
- *csavarói igénybevétel* tisztázására, amit a K keresztmetszet síkjára merőleges súlyponti tengelyre számított M_c nyomaték (csavarónyomaték) okoz.

A K jelű keresztmetszetbeli igénybevételeket a továbbiakban (megállapodás szerint) pozitív előjelűnek tekintjük, ha

- jobbról redukálva az 51.a,
- balról redukálva pedig az 51.b ábrának megfelelőek.

A két esetet összefoglalva mutatja az 51.c ábra, ahol a K keresztmetszet környezetéből kivágott elemi hosszúságú rúd végeire rajzoltuk fel a belső erőket. Az önkényesen választott előjelszabályt, az elemi rúdszakasz jelképes ábrázolásával, az 1. táblázat is mutatja. Látható, hogy a pozitív előjelű N rúderő a rúdszakaszt húzásra, a negatív előjelű pedig nyomásra veszi igénybe. Így elmondhatjuk, hogy a normál erő okozta igénybevétel két részre választható szét: *húzó* illetve *nyomó igénybevételre*. A csavaró igénybevétel előjelét egyszerűen úgy dönthetjük el, hogy amennyiben a rúd végével szembe nézünk és a nyomaték az óramutató járásával ellentétesen forog, akkor pozitív, különben pedig negatív. A nyíróigénybevétel akkor pozitív, ha a tartószakasz baloldali végén a rúdtengelyre merőleges erő

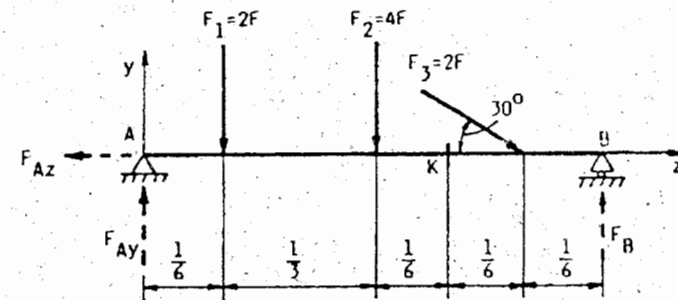
felfelé, a jobboldali tartóvégen pedig lefelé mutat (ellenkező esetben a nyíróigénybevétel negatív). A hajlítói igénybevételt pedig akkor tekintjük pozitívnak, ha a balról redukált nyomaték — ami a leggyakoribb eset — az óramutató járásával ellentétes értelmű, vagyis a tartó húzott szála felül helyezkedik el. Ez az előjelszabály értelemszerűen alkalmazható bonyolultabb rudaknál is.



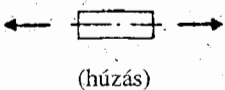
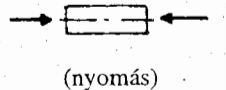
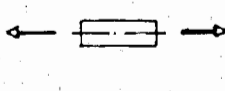
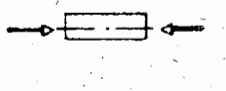
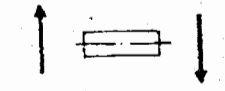
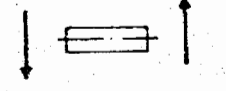
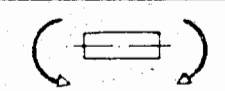
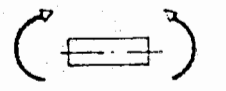
51. ábra: A K jelű keresztmetszet pozitív igénybevételei

Az igénybevételek értéke általában keresztmetszetről keresztmetszetre más és más, vagyis a tartó hossza mentén változik. E változást írják le az *igénybevételi függvények*: $N(z)$, $T(z)$, $M_h(z)$, $M_c(z)$, ahol „ z ” a tartó hossza mentén mért távolság. Az igénybevételi függvények diagramjai az *igénybevételi ábrák*. Az igénybevételi ábrák alapján meghatározható a tartó veszélyes vagy mértékadó keresztmetszete. (Ezzel a szilárdságtan tárgyalásakor még találkozunk.)

A továbbiakban vizsgáljuk az 52. ábrán látható kéttámaszú tartó K jelű keresztmetszetének igénybevételét.



52. ábra: Koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó

Pozitív (+) előjel	Megjelölés	Negatív (-) előjel	Elnevezés
	N		Rúderő
	M _C		Csavarás
	T		Nyírás
	M _h		Hajlítás

I. táblázat
Előjelszabály

Először meg kell határozni az A illetve a B pontban ébredő reakcióerők nagyságát és irányát. Az A pontban a csuklós megtámasztás (álló saru) miatt csak annyit tudunk, hogy olyan reakcióerő ébred, melynek hatásvonalára átmegy a csukló középpontján. Jelöljük az erő összetevőit a koordinátatengelyeknek megfelelően F_{Ay} -nal és F_{Az} -vel. A B pontban a mozgó saru miatt csak függőleges irányú F_B reakcióerő ébred, amit F_B -vel jelölünk. Ennek meghatározása céljából írjunk fel nyomatéki egyenletet az A pontra (pozitívnak tekintjük az óramutató járásával megegyező forgásirányt):

$$\Sigma M_i^{(A)} = 0 = 2F \frac{l}{6} + 4F \frac{l}{2} + 2F \sin 30^\circ \frac{l}{6} - F_B l,$$

innen:

$$F_B = \frac{19}{6} F,$$

mivel az F_B pozitívrá adódott, ezért értelme megegyezik a feltételezettel, vagyis felfelé mutat. Hasonlóképpen a B pontra felírt nyomatéki egyenletből meg tudjuk határozni az A pontban ébredő reakcióerő függőleges komponensét, az F_{Ay} -t:

$$\Sigma M_i^{(B)} = 0 = F_{Ay} l - 2F \frac{5}{6} l - 4F \frac{l}{2} + 2F \sin 30^\circ \frac{l}{6},$$

innen:

$$F_{Ay} = \frac{23}{6} F.$$

Az eredményből látható, hogy szintén a feltételezett irányba mutat. Az A pontban ébredő reakcióerő z tengely irányú komponensét vetületi egyenletből tudjuk meghatározni

$$\Sigma F_{iz} = 0 = -F_{Az} + 2F \cos 30^\circ,$$

ebből

$$F_{Az} = 1,732 F.$$

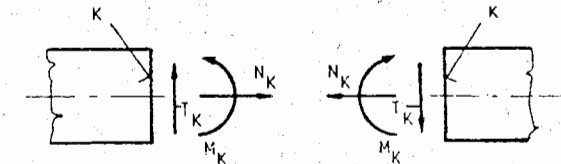
A reakcióerők ismeretében most már meghatározhatjuk a K keresztmetszet igénybevételét (az 1. táblázat előjelszabályát használjuk):

$$N_K = F_{Az} = 1,732 F,$$

$$T_K = F_{Ay} - F_1 - F_2 = \frac{23}{6} F - 2F = 4F = \frac{-13}{6} F,$$

$$M_{hK} = -F_{Ay} \frac{2}{3} l + F_1 \frac{l}{2} + 4F \frac{l}{6} = -\frac{23}{6} F \frac{2}{3} l + 2F \frac{l}{2} + 4F \frac{l}{6} = -\frac{8}{9} Fl.$$

A kapott eredményekből látható, hogy a normálerő húzást, a nyíróerő negatív nyíróigénybevételt és a hajlítónyomaték pedig negatív hajlítóigénybevételt okoz. Amennyiben a tartót a K keresztmetszetben szétválasztjuk és a fenti igénybevételeket ábrázoljuk, akkor az 53. ábrán látható eredményt kapjuk.



53. ábra

A tartó K jelű keresztmetszetének igénybevétele

A bemutatott egyszerű példán tisztáztuk a tartó egy keresztmetszetének igénybevételét. A módszer bonyolultabb igénybevételek esetén tetszőleges tartótípusra értelem szerűen alkalmazható. A műszaki gyakorlatban azonban igen sokszor találkozunk olyan terhelésekkel, melyek nem egy helyen, hanem a szerkezeti elem bizonyos szakaszán hatnak. Ezeket meg-

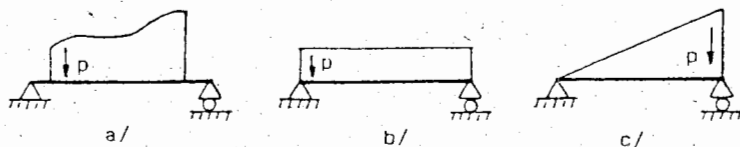
oszló terheléseknek nevezzük és a következőkben néhány olyan alapfogalmat tisztázunk, melyek a szerkezeti elemek igénybevételének áttekintéséhez feltétlenül szükségesek.

4.4. A folytonosan megoszló síkbeli erőrendszer

A megoszló terhelés fogalma

A valóságban koncentrált erő nem létezik, mivel a testre ható erő kisebb-nagyobb felületen adódik át. A merev test is idealizált fogalom, a szilárd testre ható erő pedig rajta alakváltozást (benyomódást) eredményez és így tulajdonképpen a koncentrált erő is felületen adódik át.

A leggyakrabban előforduló megoszló erő a tömegerő, mely szerkezeteinkre mindig hat. A megoszló erők jelölésére latin betűket (g , p , q , stb.) használunk és a rúd tengelyvonalára rajzolva ábrázoljuk (54. ábra), nagyságukat a rúd tengelyvonalának hosszegységére vonatkoztatjuk (N/m, kN/m, stb.). A megoszló erő nagysága (intenzitása) a tartó hossza mentén lehet állandó (54.b ábra) illetve változó (54.a, c ábra). A hossz mentén állandó nagyságú megoszló erőrendszert *egyenletesen megoszló erőrendszernek* nevezzük. A megoszló erőket csak a támaszerők meghatározásakor helyettesíthetjük eredőjükkel.

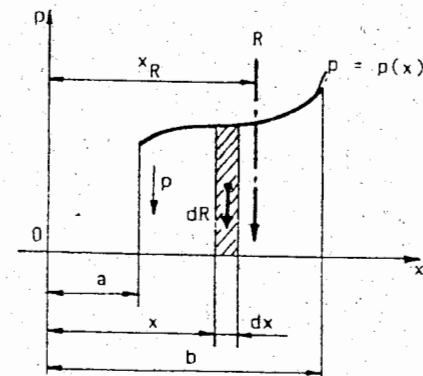


54. ábra
Megoszló erőrendszerek

A folytonosan megoszló párhuzamos síkbeli erők eredője

A folytonosan megoszló síkbeli erők intenzitásának változását a tartó hossza mentén a $p=p(x)$ függvénnyel írhatjuk le (55. ábra), az eredőjüket pedig az $[a, b]$ határok között számítás, illetve szerkesztéssel határozhatjuk meg.

Az 55. ábrán látható változó intenzitású megoszló erők eredőjét úgy tudjuk meghatározni, hogy az $[a, b]$ tartományban kiválasztunk egy dx hosszúságú szakaszt és feltételezzük, hogy a dx nullához tart, akkor az intenzitás nagysága állandónak tekinthető, az eredője a $dR=pdx$ összefüggés alapján számítható. Amennyiben a teljes intervallumot így módon felbontjuk, akkor igen sok párhuzamos erőből álló erőrendszert kapunk. Ennek az erőrendszernek az eredőjét szerkesztéssel (pl. kötélsovszöggel) meg tudjuk határozni, számítás pedig a részeredőket összegezni kell és támaszpontjukat a nyomatéki tétel felhasználásával kereshetjük meg. Az erők összegzését integrálással az alábbiak szerint tudjuk elvégezni:



55. ábra
Folyamatosan megoszló párhuzamos síkbeli erők

$$R = \int_a^b p \, dx.$$

A felírt integrálás elvégzése után az ábrán látható intenzitásgörbe alatti terület adódik. A nyomatéki egyenlet felhasználásával:

$$\Sigma M_i^{(0)} = \int_a^b x p \, dx = R x_R,$$

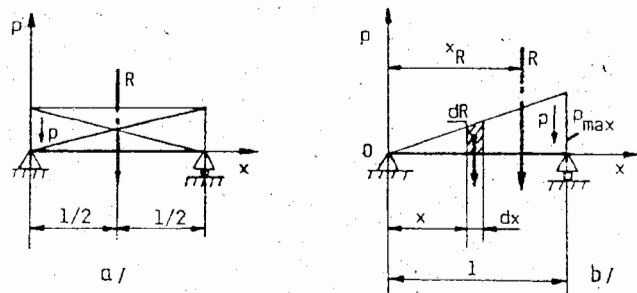
ahonnan:

$$x_R = \frac{\int_a^b x p \, dx}{R}.$$

Az integrálással tetszőleges függvénykapcsolat szerint változó síkbeli, párhuzamos erőrendszer eredője meghatározható. A továbbiakban megvizsgáljuk a gyakorlat szempontjából két fontosabb esetet, amikor állandó nagyságú, egyenletesen megoszló erőrendszerrel (56.a ábra), illetve egyenletesen változó intenzitású erőrendszerrel (56.b ábra) állunk szemben.

Az egyenletesen megoszló síkbeli erők eredőjének nagysága a téglalap területével egyenlő ($R=pl$), hatásvonala pedig a téglalap átlóinak metszéspontján áthaladó függőleges egyenes.

A következőkben meghatározzuk a lineárisan változó, megoszló erőrendszer eredőjét (56.b ábra). A megoszló erő változásait a $p = \frac{p_{\max}}{l} x$ függvénykapcsolat írja le, melynek integrálásával tudjuk az eredő erő nagyságát (a háromszög területét) meghatározni:



56. ábra

Megoszló síkbeli erőrendszerek

$$R = \int_0^l \frac{p_{\max}}{l} x dx = \frac{p_{\max}}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{p_{\max} l}{2}$$

Ezután írjuk fel a megoszló erőrendszer nyomatékát az O pontra:

$$M^{(0)} = \int_0^l x \frac{p_{\max}}{l} x dx = \frac{p_{\max}}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{p_{\max} l^2}{3}$$

E nyomaték értéke megegyezik az erőrendszer eredőjének az O pontra számított nyomatékával:

$$M^{(0)} = \frac{p_{\max} l^2}{3} = R x_R$$

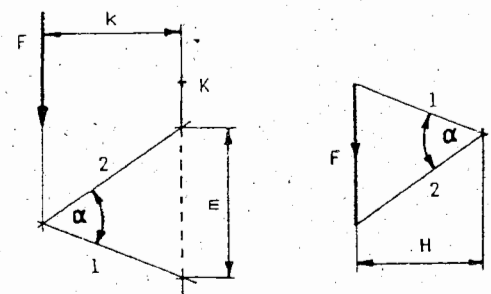
innen:

$$x_R = \frac{M^{(0)}}{R} = \frac{2 p_{\max} l^2}{3 p_{\max} l} = \frac{2}{3} l$$

Az eredményből látható, hogy a lineárisan változó, megoszló erőrendszer eredőjének függőleges hatásvonala, az O ponttól mérve, a tartó hosszának kétharmad részénél helyezkedik el. Az eddigi ismereteket felhasználva meg tudjuk határozni mindazon megoszló erőrendszerek eredőjének helyét, amelyek a fentebbi terheléstípusokból (lásd az 56. ábrán levőket) összetehetők (pl. trapéz). Természetesen a bonyolultabb függvénykapcsolatokkal leírható, változó intenzitású erőrendszerek eredőjének nagyságát és eredőjének elhelyezkedését is meg lehet határozni integrálással. Általánosságban elmondható, hogy az eredő nagysága az intenzitás-függvény alatti területtel egyenlő, hatásvonala pedig átmegy e terület súlypontján.

4.5. Kéttámaszú tartók igénybevételi ábrái

A tartók igénybevételi ábráit fel tudjuk építeni szerkesztéssel és számítással is. A nyomatéki ábrát szerkesztéssel egyszerűen meg lehet határozni. Ehhez azonban előzőleg meg kell ismerkednünk az F erőnek egy K ponton átmenő tengelyre ható nyomatékának szerkesztésével (57. ábra). (A szerkesztési módszer ugyanaz, mint amit a 36. ábrán egy eredő erő nyomatékának szerkesztésekor láttunk).



57. ábra

Az erő nyomatékának szerkesztése

Mérjük fel erőléptékben az F erőt és vegyük fel tetszőlegesen az O pólust, amit kössünk össze az erő kezdő és végpontjával, így megkapjuk a vektorsokszög 1-es és 2-es sugarát, majd az F erő hatásvonalából kiindulva szerkesszük meg a kötélsokszöget. A kötélágak metszik a K ponton áthaladó és az F erővel párhuzamos egyenest. A metszéspontok távolságát jelöljük m -mel, amit *nyomatéki metszéknek* nevezünk. Az O póluspontot és az erő vektorának merőleges távolságát (a pólustávolságot) jelöljük H -val, melyet hosszléptékben kell leolvasni. Mivel a vektorsokszögben és a kötélsokszögben az α szög megegyezik, ezért írhatjuk, hogy

$$\frac{F}{H} = \frac{m}{k}$$

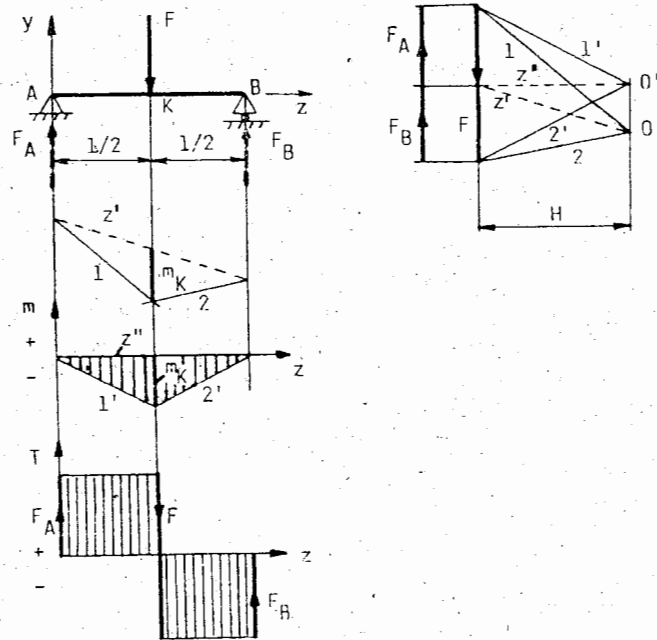
ahonnan $Fk = mH = M$, vagyis a nyomatéki metszék (m) és a pólustávolság (H) szorzata megadja az F erőnek a K ponton átmenő tengelyre számított nyomatékát. Mivel az O póluspontot tetszőlegesen vehetjük fel, ezért a H is változik a felvétel függvényében, így azt mondhatjuk, hogy a nyomatéki metszék (m) arányos a nyomatékkal és az arányossági tényező a pólustávolság (H).

A nyomaték szerkesztésének ismeretében hozzákezdhetünk a tartók igénybevételi ábráinak meghatározásához.

4.5.1. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartók

Egy koncentrált erővel terhelt tartó

Először megvizsgáljuk az 58. ábrán látható kéttámaszú tartót, melyre egyetlen koncentrált erő hat. Szerkesztéssel és számítással meghatározzuk a tartó igénybevételi ábráit. Erőléptékben mérjük fel az F erőt, majd vegyünk fel egy tetszőleges O pólust, melyből kiindulva kössük össze az erő kezdő- és végpontját, így megkapjuk az 1-es és 2-es jelű sugarakat. E sugarakkal az F_A reakcióerő hatásvonalából kiindulva szerkesztünk kötélsokszöveget.



58. ábra

Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételi ábrái

Mivel az F erő ismert, és tudjuk azt is, hogy a tartó az F , F_A , F_B erők hatására egyensúlyban van, ezért a két reakcióerőt e feltételből kiindulva meg tudjuk szerkeszteni, ugyanis egyensúly esetén a vektorsokszögnek is és a kötélsokszögnek is záródnia kell. Esetünkben a speciális alakú vektorsokszög záródik, mivel az F_A és F_B erők nagysága megegyezik az F nagyságával, csupán értelmük ellentétes. A kötélsokszög viszont akkor záródik, hogyha az F_A reakcióerő és az 1-es kötéloldal metszéspontját összekötjük az F_B reakcióerő és a 2-es kötéloldal metszéspontjával és kapjuk z' záróoldalt. Az O pontból kiindulva párhuzamost

kell húzni a kötélsokszög záróoldalával, ami metszi az F erőt és a metszéspont megadja az F_A és F_B reakcióerők nagyságát. Hogy melyik helyezkedik el a metszéspont alatt illetve felett, azt úgy tudjuk eldönteni, hogy felhasználjuk a kötélsokszög szerkesztésénél tanultakat. Ismert ugyanis, hogy a kötélsokszög és a vektorsokszög között kölcsönösség áll fenn, vagyis az F_B hatásvonala, a záróvonal (z') és a 2-es kötéloldal metszéspontjának a vektorsokszögben egy háromszög felel meg, amit a z' záróoldallal párhuzamos egyenes, a 2-es vektorsugar és az F_B reakcióerő határol. Így elmondhatjuk, hogy az F_B reakcióerő az F erő és a z' jelű egyenes metszéspontja alatt, az F_A pedig fölötté helyezkedik el, tehát szerkesztéssel meghatározhatjuk a támasztóerők nagyságát.

Amennyiben visszagondolunk az erő nyomatékának szerkesztésére (57. ábra), könnyen beláthatjuk, hogy az 1-es, 2-es és a z' egyenesekkel határolt kötélsokszögben a függőleges metszések a nyomatékkal arányosak, vagyis a tartó hossza mentén a kötélsokszög függőleges metszékei keresztmetszetről keresztmetszetre megadják a nyomatékkal arányos metszégeket. A K jelű keresztmetszetben például az m_K ismeretében a nyomaték értékét az $M_K = m_K H$ összefüggés alapján számíthatjuk. Mivel az O pólust tetszőlegesen vehetjük fel, ezért a H nagysága változik. Mivel az igénybevételi ábrákat úgy rajzoljuk, hogy az igénybevételek előjelhelyes nagyságát a vízszintes egyenestől mérjük fel, ezért olyan kötélsokszöveget kell rajzolnunk, melynek záróoldala vízszintes. Ezt a reakcióerők ismeretében egyszerűen úgy vehetjük fel, hogy a vektorsokszögben az F erő és a z' egyenes metszéspontjából vízszintes egyenest húzunk (z'') és ez az O pontból induló függőleges egyenesen kimetszi az O' pólust, amit össze kell kötni az F erő kezdő és végpontjával, így megkapjuk az 1' és 2' sugarakat, melyek ismeretében meg tudjuk szerkeszteni a vízszintes záróoldalú kötélsokszöveget. Mivel a H pólustávolság ebben az esetben is ugyanaz, mint a ferde záróoldalú kötélsokszögben, ezért a nyomatéki metszések megegyeznek a ferde és a vízszintes záróoldalú kötélsokszögben.

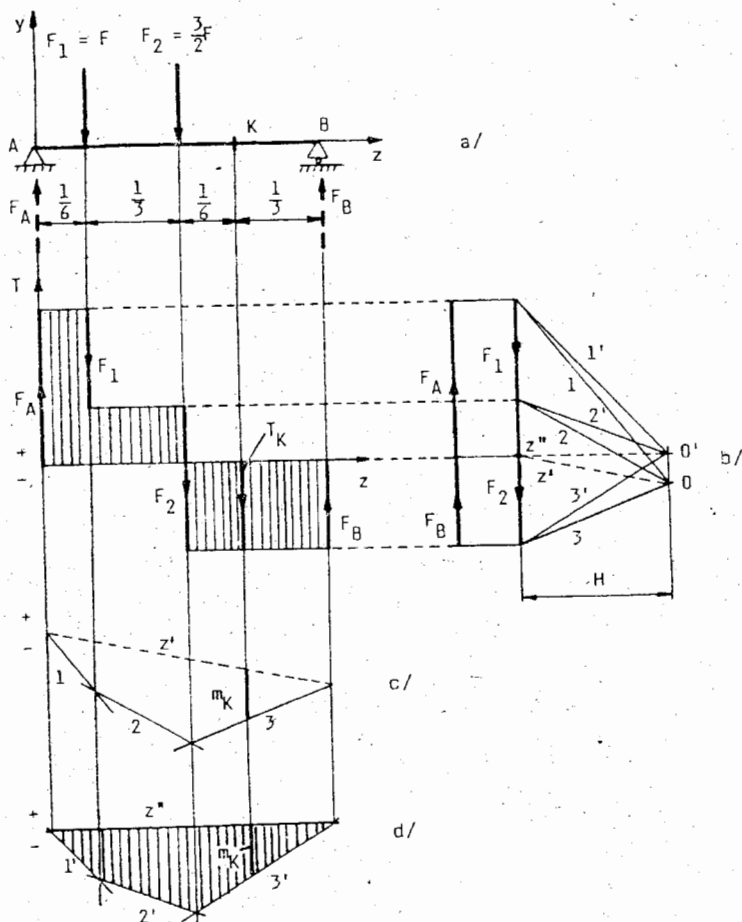
A nyíróerő ábrát úgy tudjuk megszerkeszteni, hogy a baloldali tartóvégből kiindulva pontról pontra felmérjük a nyíróerő nagyságát az előjelszabálynak megfelelően. Tehát mivel az A pontban ébredő F_A felfelé mutat (a baloldali tartóvégen), ezért ez pozitív nyírást okoz. E nyíróerő az F erő támadáspontjáig állandó, ahol viszonyt a nyíróerő ábrában ugrás lép fel, mivel az F_A reakcióerő és az F erő vektori eredőjét kell képezni és az eredmény lefelé mutató erő lesz, ami a B pontig állandó, a B pontban pedig a nyíróerő ábrát az F_B reakcióerő zárja.

Az igénybevételi ábrákat ebben az esetben számítás révén nagyon egyszerűen meg tudjuk határozni. Az F_A és F_B reakcióerők az F erő nagyságának felével egyenlők, mivel középen hat a terhelés. A hajlítónyomaték a tartó két végén zérus, mivel nyomatékmentes az A és B pont. A tartó felezéspontjáig a nyomaték lineárisan változik és a K pontban pedig

$$M_K = M_{\max} = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

A nyíróerő ábra pedig az előbb elmondottak szerint a számított értékek alapján felrajzolható.

Két koncentrált erővel terhelt tartó



59. ábra

Koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó

A továbbiakban szerkesztéssel és számítással meghatározzuk az 59. ábrán látható, koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételi ábráit. Előzőleg azonban meg kell határozni az \$A\$ és \$B\$ pontban ébredő reakcióerők nagyságát. Mérjük fel egymásután, léptékhelyesen az \$F_1\$ és \$F_2\$ erőket. A két erővel a reakcióerők tartanak egyensúlyt, melyek értelme ismert, de nagyságuk nem. Meghatározásuk céljából egy \$O\$ póluspont felvételével rajzoljuk meg a vektorsokszöveget. A vektorsokszög 1, 2, 3-as jelű sugarainak felhasználásá-

val szerkesztjük meg a kötélsokszöveget (59.c ábra). Mivel egyensúly esetén a kötélsokszögnek is záródni kell, ezért kössük össze a \$z'\$ záróvonalal a kötélsokszög kezdő- és végpontját, majd húzzunk párhuzamost a \$z'\$ záróvonal és az \$F_1, F_2\$ erők hatásvonalának metszéspontja az előző feladathoz (58. ábra) hasonlóan megadja az \$F_A\$ és \$F_B\$ reakcióerők nagyságát. A vízszintes záróoldalú kötélsokszöveget (nyomatéki ábrát) az előző feladatban megismert módon tudjuk megszerkeszteni (59.d ábra). A nyíróigénybevételi ábrát a külső erők ismeretében egyszerűen megrajzolhatjuk (59.b ábra). Az igénybevételi ábráról leolvashatjuk egy tetszőleges \$K\$ keresztmetszetben ébredő nyíróerőt (\$T_K\$) és a nyomatéki metszék alapján meghatározhatjuk a keresztmetszetben ébredő nyomatékot (\$M_K = m_K H\$).

Az igénybevételi ábrák számítással történő felépítéséhez meg kell határozni a reakcióerők értékét. Mivel az aktív és a passzív erők párhuzamos erőrendszert alkotnak, ezért az ismeretlen reakcióerők \$F_A\$ és \$F_B\$ meghatározásához elegendő nyomatéki egyenletet felírni az \$A\$ és \$B\$ pontra (pozitívnak tekintjük azt a forgásirányt, amelyik az \$y\$ tengelyt a \$z\$ tengelybe forgatja):

$$\Sigma M_i^{(A)} = 0 = F \frac{l}{6} + \frac{3}{2} F \frac{l}{2} - F_B l,$$

innen:

$$F_B = \frac{11}{12} F \quad (\uparrow).$$

Hasonlóképpen:

$$\Sigma M_i^{(B)} = 0 = F_A l - F \frac{5}{6} l - \frac{3}{2} F \frac{l}{2},$$

ahonnan:

$$F_A = \frac{19}{12} F \quad (\uparrow).$$

Számításunkat úgy ellenőrizhetjük, hogy vetületi egyenletet írunk fel „y” irányban:

$$F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0,$$

helyettesítés után:

$$\frac{19}{12} F - F - \frac{3}{2} F + \frac{11}{12} F = 0,$$

tehát számításunk helyes volt.

A nyíróerő ábrát számítással úgy építhetjük fel, hogy a tartó hossza mentén balról jobbra haladva az \$F_A\$ reakcióerő „y” irányú komponensét (esetünkben csak az van) és a tartó hossz tengelyére merőleges erők vektori eredőjét képezzük és az így kapott nyíróerőt az előjelszabályunknak megfelelően ábrázoljuk keresztmetszetről keresztmetszetre.

Például a K keresztmetszetben a nyírőerő értéke:

$$T_K = F_A - F_1 - F_2 = \frac{19}{12}F - F - \frac{3}{2}F = -\frac{11}{12}F.$$

A hajlítónyomatéki ábrát a reakcióerők ismeretében meg tudjuk határozni, figyelembe véve az előjelszabályt, vagyis azt, hogy amennyiben a húzott szál felül van, akkor az igénybevétel pozitív, ellenkező esetben pedig negatív. Így például a K keresztmetszetben a nyomaték értéke

$$M_K = F_A \frac{2}{3}l - F_1 \frac{1}{2} - F_2 \frac{1}{6} = \frac{19}{12}F \frac{2}{3}l - F \frac{1}{2} - \frac{3}{2}F \frac{1}{6} = \frac{11}{36}Fl.$$

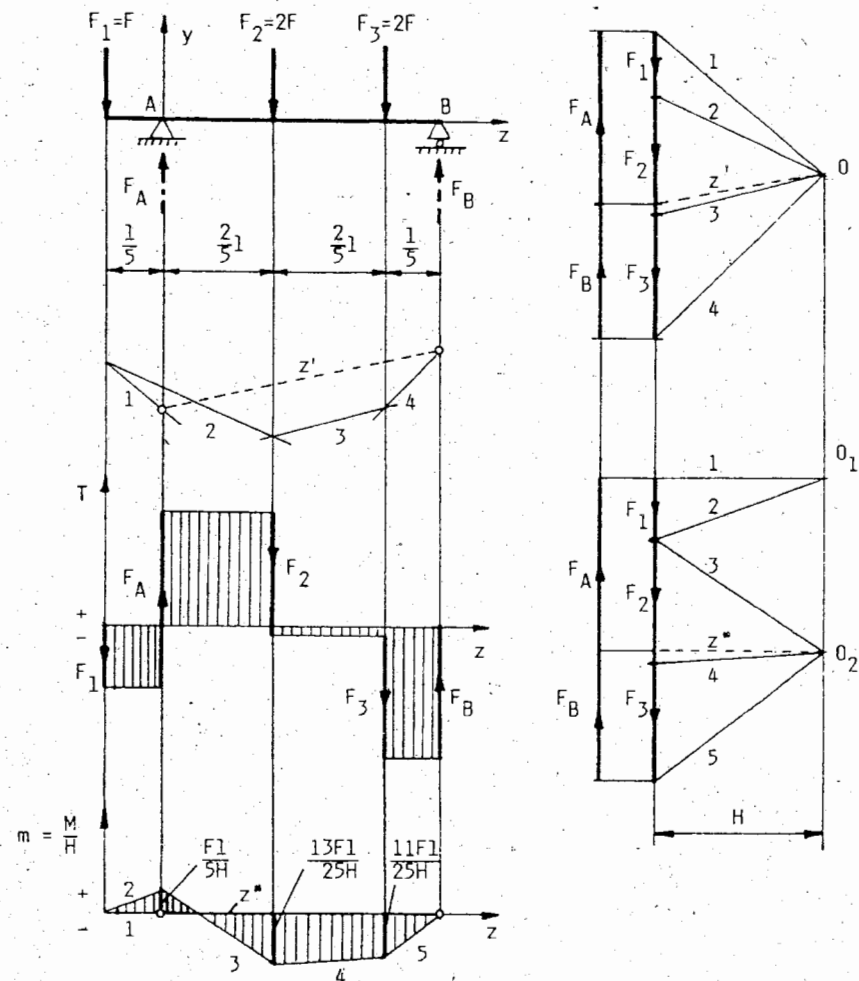
Ez olyan nyomatékokat eredményez, hogy a húzott szál alul van, tehát a K keresztmetszet igénybevétele negatív. Hasonlóképpen számítható bármelyik keresztmetszetben a nyomaték értéke és ábrázolható az igénybevétel.

Az igénybevételi ábrák vizsgálata alapján elmondhatjuk, hogy a koncentrált erő támaszpontjában a nyírőerő ábrának ugrása, a nyomatéki ábrának pedig törése van. A maximális hajlítónyomaték pedig ott ébred, ahol a nyírőerő ábra metszi a z tengelyt.

4.5.2. Koncentrált erőkkel terhelt konzolos tartó

Konzolos tartónak nevezzük azt a tartót, melynél az alátámasztás nem a tartó végén van (60. ábra). Esetünkben például az F_1 erő az A ponttól balra túlnyúló konzolos részen támad.

A tartó igénybevételi ábráinak szerkesztése céljából először meg kell határozni az A és B pontban ébredő reakcióerőket. Ezért adjuk össze az F_1, F_2, F_3 erőt, majd a kezdő- és végpontokat kössük össze az O pólussal. Ezután a vektorsokszög sugarainak segítségével szerkesztjük meg a kötélsokszöget, melynek indításánál figyelembe kell venni, hogy a vektorsokszögben az F_1 erő, valamint az 1-es és 2-es vektorsokszög sugara által határolt háromszögnek a kötélsokszögben egy pont felel meg. Ez azt jelenti, hogy az F_1 erő hatásvonalán az 1-es és 2-es kötéloldal egy pontban metszi egymást. Ezután a kötélsokszög szerkesztése a már megismert módon történik. Mivel a tartó a ráható erők hatására egyensúlyban van, ezért a kötélsokszögnek is záródnia kell, ami akkor következik be, hogyha az 1-es kötéloldal és az F_A hatásvonalának metszéspontját összekötjük a 4-es kötéloldal és az F_B reakcióerő hatásvonalának metszéspontjával. Ezáltal megkaptuk a z' záróoldalt, mellyel az O pontból kiindulva, párhuzamosot kell húzni és ez kimetszi az F_A és F_B erő nagyságát. A reakcióerők ismeretében meg tudjuk szerkeszteni a nyírőerő ábrát, mégpedig úgy, hogy a tartó baloldali végétől indulva felmérjük a nyírőerők nagyságát. A továbbiakban felmerül a kérdés, hogy miként tudunk vízszintes záróoldalt szerkeszteni. Ezt a reakcióerők ismeretében nagyon egyszerűen megtehetjük (60. ábra, jobb alsó szerkesztés). A szemléletesség kedvéért a szerkesztést két póluspont (O_1, O_2) segítségével és ugyanolyan pólustávolsággal végeztük el. Eredményként a baloldali alsó ábrát kaptuk, melyben a jellegzetes metszékeket számítással is meg tudjuk határozni.



60. ábra

Konzolos kéttámaszú tartó igénybevételi ábrái

Számításainkhoz előzőleg ismerni kell a reakcióerők nagyságát, amit az A , illetve B pontra felírt nyomatéki egyenletekből tudunk meghatározni (pozitív forgásiránynak tekintjük azt, hogyha az y tengely a z -be fordul el).

$$\sum M_i^{(A)} = 0 = -F_1 \frac{1}{5}l + F_2 \frac{2}{5}l + F_3 \frac{4}{5}l - F_B l = -F \frac{l}{5} + \frac{4}{5}Fl + \frac{8}{5}Fl - F_B l,$$

innen:

$$F_B = \frac{11}{5} F \quad (\uparrow)$$

Hasonlóképpen:

$$\sum M_i^{(B)} = 0 = -F_1 \frac{6}{5} l + F_A l - F_2 \frac{3}{5} l - F_3 \frac{1}{5} l = -\frac{6}{5} Fl + F_A l - \frac{6}{5} Fl - \frac{2}{5} Fl = 0,$$

innen:

$$F_A = \frac{14}{5} F \quad (\uparrow)$$

Számításunk helyességéről ellenőrzéssel is meggyőződhetünk:

$$\sum F_{iy} = -F_1 + F_A - F_2 - F_3 + F_B = -F + \frac{14}{5} F - 2F - 2F + \frac{11}{5} F = 0.$$

Mivel a tartóra ható külső erőrendszer teljes mértékben ismert, ezért meg tudjuk határozni a nyomatékok, illetve a nyomatéki metszések nagyságát (a pozitív forgásirányt most a pozitív hajlítói igénybevételnek megfelelően vesszük fel):

az A jelű pontban:

$$M_A = F_1 \frac{1}{5} l = \frac{Fl}{5}, \text{ ill. } m_A = \frac{Fl}{5H} \quad \left(\curvearrowright \right)$$

Az F_2 támadáspontjában:

$$M_2 = F_1 \left(\frac{1}{5} l + \frac{2}{5} l \right) - F_A \frac{2}{5} l = -\frac{13}{25} Fl, \text{ ill. } m_2 = -\frac{13Fl}{25H} \quad \left(\curvearrowleft \right)$$

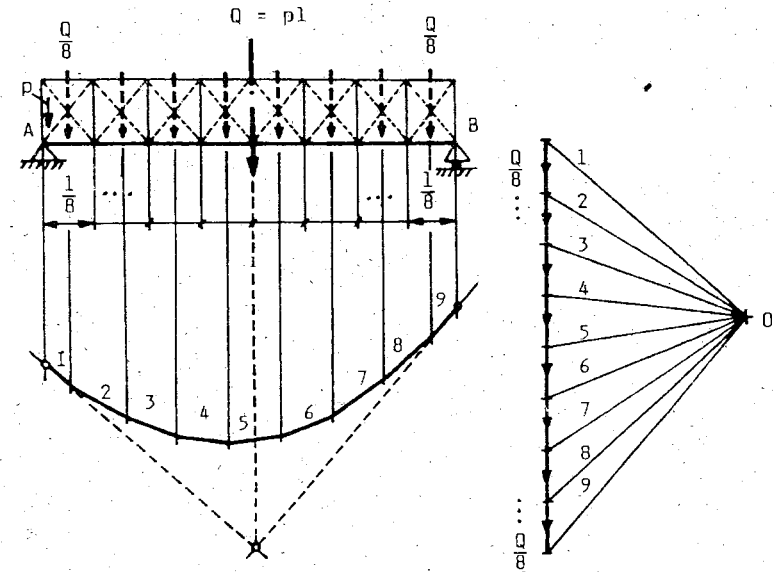
az F_3 támadáspontjában:

$$M_3 = F_1 \left(\frac{1}{5} l + \frac{2}{5} l + \frac{2}{5} l \right) - F_A \left(\frac{2}{5} l + \frac{2}{5} l \right) + F \frac{2}{25} l = -\frac{11}{25} Fl, \text{ ill. } m_3 = -\frac{11Fl}{25H} \quad \left(\curvearrowleft \right)$$

A koncentrált erőkkel terhelt tartó igénybevételi ábráinak meghatározása után rátérünk a megoszló terhelésű tartók vizsgálatára.

4.5.3. Egyenletesen megoszló terhelésű tartó

Az idealizált koncentrált terhelés mellett nagyon gyakran kell megoszló terhelésű szerkezeteket vizsgálni. Itt is mindig felmerül az igénybevételi ábrák felépítésének szükségessége. Mielőtt azonban rátérnénk egy konkrét tartótípusra, vizsgáljuk meg, miként tudjuk megszerkeszteni egy megoszló terhelésű tartóhoz a kötélsovszöveget, vagyis a hajlítónyomatéki ábrát (61. ábra).



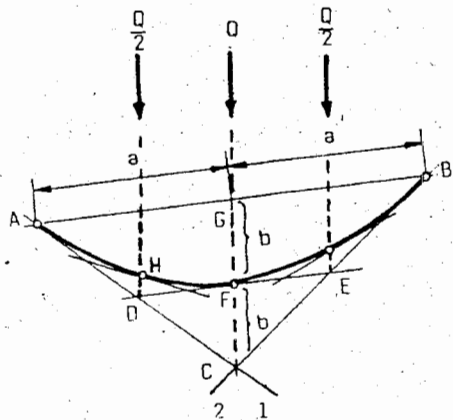
61. ábra

Kötélsovszög szerkesztés megoszló terhelésű tartónál

Az ábrán látható tartót osszuk nyolc egyenlő hosszúságú szakaszra, majd az egyes szakaszokon ható megoszló terheléseket helyettesítsük eredőjükkel ($Q_1 = Q_2 = \dots = Q_8 = \frac{pl}{8} = \frac{Q}{8}$). Ezután szerkesztjük meg a vektorsokszöveget és utána a kötélsovszöveget. A kötélsovszögből látható, hogy az első (1) és az utolsó (9) kötéloldal a tartóra ható megoszló terhelés eredőjének hatásvonalán metsződik. Könnyen beláthatjuk azt is, hogyha minél több szakaszra osztjuk fel a tartót (az n -et minden határon túl növeljük), akkor a kötélsovszög oldalhosszúságai mind kisebbek lesznek, és eredményként egy görbét fognak leírni, melynek szélső érintői szintén az eredő hatásvonalán metsződnének. Egyenletesen megoszló terhelés esetén igazolható, hogy e görbe másodfokú parabola.

A másodfokú parabolát, a fentiek ismeretében, két pontbeli érintőjének segítségével könnyen megrajzolhatjuk és a szerkesztést mechanikussá tehetjük (62. ábra).

A parabola A és B pontbeli érintőjének (1-es és 2-es egyenes) C jelű metszéspontján megy át a megoszló terhelés eredőjének hatásvonalára és a GC szakasz felezéspontjában (F) az AB szakasszal párhuzamos érintő. Ez az utóbbi érintő a D és E jelű pontban metszi az 1-es és 2-es érintőt. Felezzük meg az AD és DF szakaszt, majd felezéspontjukat kössük össze, így egy újabb érintőt kapunk, és az összekötő szakasz felezéspontjában (a Q/2 részre eső hatásvonalán) pedig a parabola egy újabb pontját (H). Az eljárás ismétléssel tetszőlegesen számú parabolapont és érintő szerkeszthető.



62. ábra
Parabola szerkesztése

A továbbiakban térjünk rá a 63. ábrán látható megoszló terhelésű tartó igénybevételei ábráinak felépítésére.

Az egyenletesen megoszló terhelést a támasztó erők meghatározása céljából helyettesítjük egyetlen erővel, az eredővel ($Q=pl$). Ezután szerkesztjük meg a vektorsokszöget és rajzoljuk meg a kötélsokszöget, melynek ismeretében (a z' záróoldal felhasználásával) ismertté válik az F_A és F_B reakcióerők nagysága, ami ebben az esetben

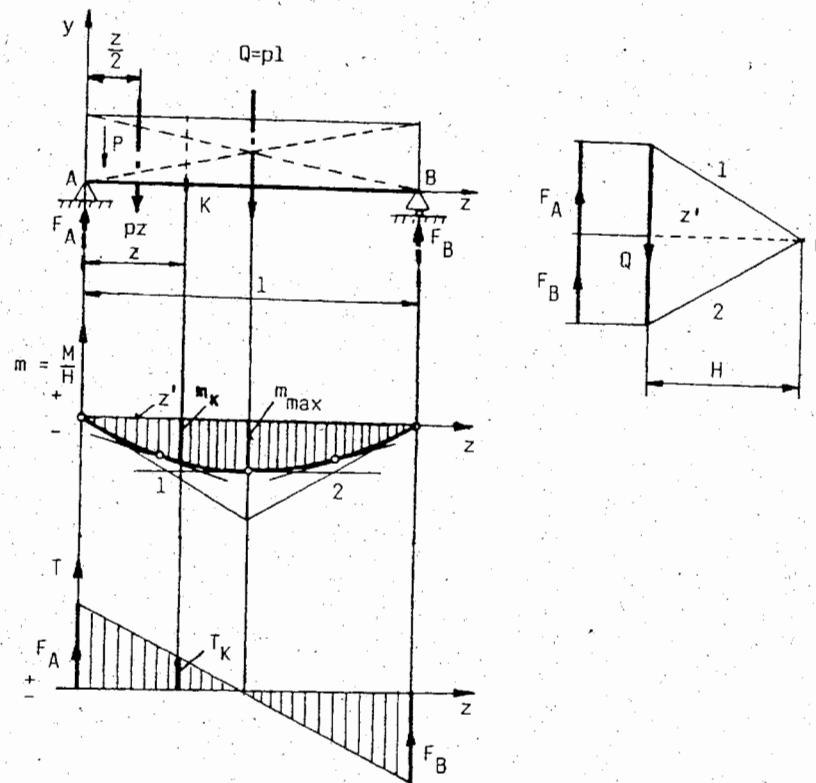
$$F_A = F_B = \frac{Q}{2} = \frac{pl}{2}$$

A kapott kötélsokszöget ebben az esetben csak a reakcióerők meghatározásához tudjuk felhasználni. A nyomatéki ábra megszerkesztéséhez fel kell használni a 62. ábra kapcsán tanult, a parabola szerkesztéséhez szükséges ismereteket. Ily módon a megoszló terhelésű tartó nyomatéki ábráját már egyszerűen meghatározhatjuk.

Mivel szerkesztéssel a nyomaték értékével arányos metszékét kapunk, ezért a továbbiakban számítsuk ki a nyomaték tényleges értékét egy tetszőleges K jelű keresztmetszetben:

$$M_K = -F_A z + (pz) \frac{z}{2} = \frac{p}{2} (z^2 - lz)$$

Mivel a K keresztmetszetet tetszőlegesen vehetjük fel, ezért a felvétel függvényében a z jelű abszcissa értéke is változik és emiatt a nyomaték másodfokú függvénnyel (parabolával) írható le. (E terhelés hatására a tartó nyomott szála van felül, ezért a számított nyomaték az előjelszabálynak megfelelően negatív igénybevételt okoz). A továbbiakban számítsuk ki, hol ébred a maximális nyomaték. A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az első derivált zérus legyen:



63. ábra
Egyenletesen megoszló terhelésű tartó igénybevételi ábrái

$$\frac{dM}{dz} = 0 = \frac{p}{2} (2z - l),$$

$$z = \frac{l}{2},$$

innen:

adódik, vagyis a maximális nyomaték a tartó hosszának felénél ébred, értéke pedig:

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8}$$

A nyomatéki metszék értéke pedig az $M_{\max} = m_{\max} \cdot H$ alapján

$$m_{\max} = \frac{pl^2}{8H}$$

A továbbiakban írjuk fel egy tetszőleges K keresztmetszetben a nyíróerő nagyságát:

$$T_K = F_A - pz = \frac{pl}{2} - pz = p\left(\frac{l}{2} - z\right)$$

Látható, hogy a tartó hossza mentén lineárisan változik és egy olyan egyenest kapunk eredményül, amelyik a tartó felezéspontjában (az $l/2$ helyen) metszi a z tengelyt.

Ha összevetjük a nyíróerő és a nyomatéki ábrát, látjuk, ahol a nyíróerő ábra metszi a z tengelyt, ott a nyomatéki ábrának szélsőértéke (az igénybevétel szempontjából maximális értéke) van.

A továbbiakban vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor koncentrált erő és megoszló terhelés együttesen hat.

4.5.4. Vegyes terhelésű tartó

Vegyes terhelésűnek nevezzük a tartót, ha azt megoszló terhelés és koncentrált erő is terheli (64. ábra).

Az igénybevételi ábrák felépítése céljából először meghatározzuk az F_A és az F_B reakcióerők nagyságát az ismert kötélcsokszög-szerkesztéssel. A ferde záróvonalú kötélcsokszög mellett az O' pont felhasználásával megrajzoltuk a vízszintes záróoldalú kötélcsokszöget is. A nyíróerő ábrát is az ismert módon szerkesztettük meg. Látjuk, hogy a nyomatéki ábrának ott van szélsőértéke (maximális értéke), ahol a nyíróerő ábra metszi a z tengelyt.

A nyomaték tényleges értékének (M), illetve a nyomatéki metszések számításához ismerni kell a reakcióerőket. Ebből a célból írjuk fel a nyomatéki egyenletet!

$$\Sigma M_i^{(A)} = 0 = F \frac{1}{5} l + 2F \frac{4}{5} l - F_B l,$$

innen:

$$F_B = \frac{9}{5} F \quad (\uparrow)$$

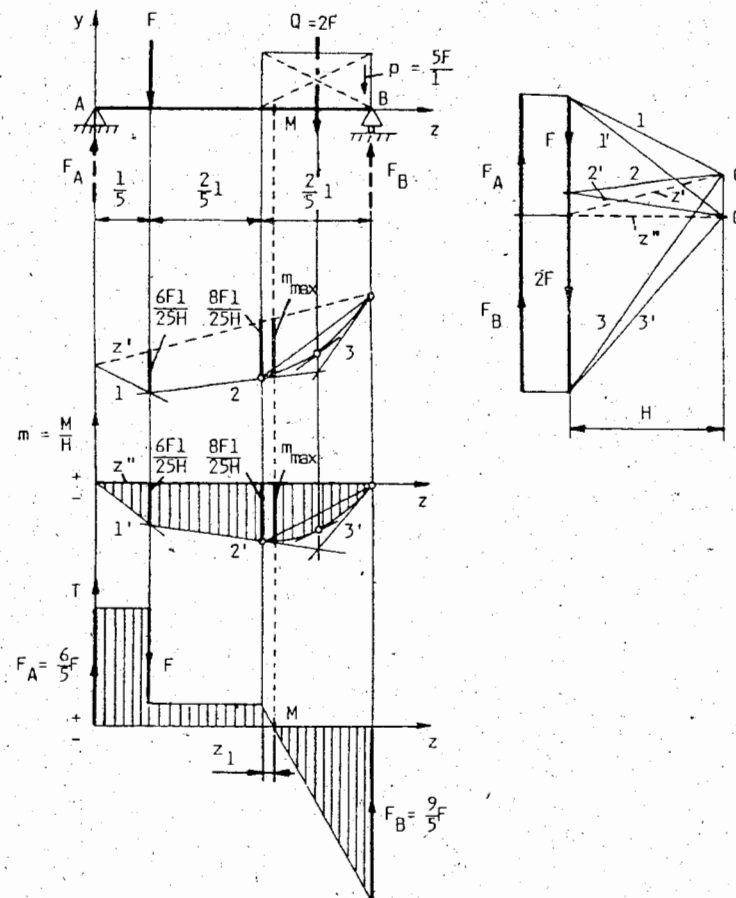
$$\Sigma M_i^{(B)} = 0 = F_A l - F \frac{4}{5} l - 2F \frac{1}{5} l,$$

ahonnan:

$$F_A = \frac{6}{5} F \quad (\uparrow)$$

A reakcióerők ismeretében ki tudjuk számítani a tartó hossza mentén, az egyes keresztmetszetekben ébredő nyomatékokat. (Néhány értéket a 64. ábrán látunk).

A továbbiakban meghatározzuk, hogy a nyíróerő ábra hol metszi a z tengelyt. Ebből a célból redukáljuk az M jelű keresztmetszettől balra levő nyíróerőket az M keresztmetszetbe, ahol a nyíróerő értéke (T_M) zérus.



64. ábra

A vegyes terhelésű tartó igénybevételi ábrái

$$T_M = F_A - F - pz_1 = \frac{6}{5} F - F - \frac{5F}{l} z_1 = 0,$$

innen:

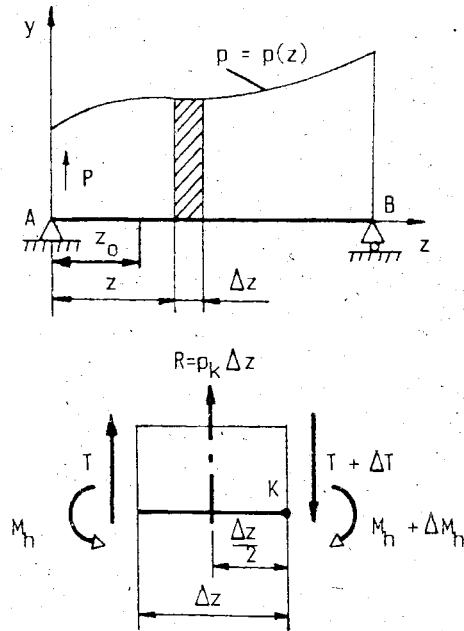
$$z_1 = \frac{1}{25} l.$$

A 64. ábráról látható az is, hogy mind a ferde, mind pedig a vízszintes záróoldalú kötélcsokszögben, az azonos keresztmetszetekben, a nyomatéki metszések megegyeznek.

A következőkben vizsgáljuk meg az igénybevételeket leíró igénybevételi függvények közti összefüggéseket.

4.6. Összefüggések a tartó igénybevételi függvényei között

A továbbiakban összefüggéseket keresünk a 65. ábrán látható egyenes tengelyű, $p=p(z)$ intenzitású megoszló erőrendszerrel terhelt tartónál a megoszló terhelés intenzitása $p(z)$, a $T(z)$ nyíróerő és az $M_h(z)$ hajlítónyomaték között.



65. ábra

Megoszló terhelésű tartószakaszon ébredő erők

A tartóból kivágtunk egy Δz hosszúságú elemet és rárajzoltuk a külső megoszló terhelést, valamint az elvágási helyen a súlypontokba redukált belső erőrendszert. (A rúdelemnél a p_k a közepes intenzitást jelenti). A rúdelem a ráható erők eredményeként egyensúlyban van. Írjuk fel az y irányú vetületei egyenletét:

$$\sum F_{iy} = 0 = T - (T + \Delta T) + p_k \Delta z,$$

innen:

$$p_k = \frac{\Delta T}{\Delta z};$$

a $\Delta z \rightarrow 0$ határátmenet esetén

$$\frac{dT}{dz} = p(z),$$

azaz a nyíróerő z koordináta szerinti deriváltja egyenlő a megoszló erőrendszer intenzitásával.

Ezután írjuk fel a K ponton átmenő, a rajz síkjára merőleges tengelyre a nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_i^{(K)} = M_h - (M_h + \Delta M_h) - T \Delta z - p_k \Delta z \frac{\Delta z}{2} = 0,$$

$$\Delta M_h = -T \Delta z - p_k \Delta z \frac{\Delta z}{2},$$

azaz

$$\frac{\Delta M_h}{\Delta z} = -T - p_k \frac{\Delta z}{2}.$$

A $\Delta z \rightarrow 0$ határátmenet esetén

$$\frac{dM_h}{dz} = -T,$$

és

$$\frac{d^2 M_h}{dz^2} = -\frac{dT}{dz} = -p(z).$$

Tehát tudjuk, hogy a hajlítónyomaték z koordináta szerinti deriváltja egyenlő a nyíróerő negatív értékével, illetve a hajlítónyomaték z koordináta szerinti második deriváltja egyenlő a megoszló erőrendszer intenzitásának ellentétes előjelű értékével. A gyakorlatban más előjelzés is előfordul, a lényeg azonban az, hogy amit választottunk, azt következetesen tartjuk be.

A nyíróerő deriváltjára kapott

$$dT = p(z) dz$$

összefüggést integráljuk a z_0 - z szakaszon:

$$\int_{T_0}^T dT = \int_{z_0}^z p(z) dz,$$

illetve:

$$T - T_0 = \int_{z_0}^z p(z) dz,$$

ebből:

$$T = T_0 + \int_{z_0}^z p(z) dz.$$

Hasonlóképpen a hajlítónyomaték deriváltjára kapott

$$dM_h = -T(z) dz$$

összefüggésből, a z_0 - z szakaszon az integrálás elvégzése után

$$M_h - M_{h0} = - \int_{z_0}^z T(z) dz,$$

innen:

$$M_h = M_{h0} - \int_{z_0}^z T(z) dz.$$

Az eredmények alapján elmondhatjuk, hogy a z_0 - z tartószakaszon a $p(z)$ megoszló terhelésre területe a nyíróerő megváltozását, a $T(z)$ nyíróerőábra területe ellenkező előjellel a hajlítónyomaték megváltozását adja.

A fenti eredmények felhasználásával összeállítottuk a 2. táblázatot.

$p(z)$	$T(z)$	$M_h(z)$
$p = p_0 = 0$ nincs megoszló terhelés	$T = T_0 = \text{áll.}$ (vízszintes egyenes)	$M_h = M_{h0} - T_0 z$ (ferde egyenes)
$p = p_0 = \text{áll.} \neq 0$ (egyenletes)	$T = T_0 + pz$ (ferde egyenes)	$M_h = M_{h0} - T_0 z - p_0 \frac{z^2}{2}$ (másodfokú parabola)
koncentrált erő	ugrás	törés
koncentrált nyomaték	nincs változás	ugrás

2. táblázat

A nyíróerő és a hajlítónyomaték jellegét leíró függvények néhány terheléstípus mellett

A táblázat szemléletesen összefoglalja az igénybevételi ábráknál eddig tanultakat. A következőkben határozzuk meg a befogott tartók igénybevételi ábráit.

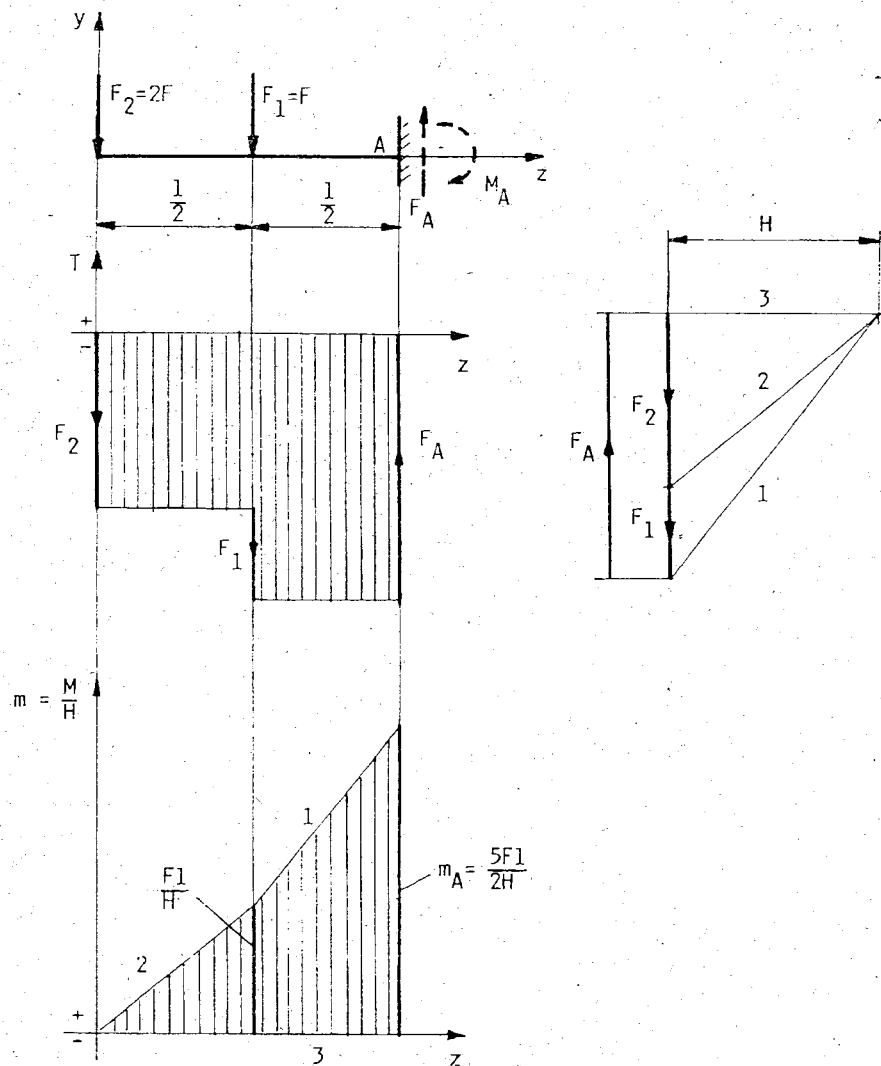
4.7. Befogott tartók igénybevételi ábrái

A megfogási módok vizsgálatokor láttuk, hogy a befogás helyén nemcsak ismeretlen nagyságú és irányú reakcióerő ébred, hanem reakciónyomaték is, ami meggátolja a befogásnál a keresztmetszet elfordulását. Ezért a befogás a számítások szempontjából három ismeretlent: két erőösszetevőt és egy nyomatékot jelent síkbeli esetben.

A továbbiakban megvizsgáljuk a befogott (konzolos) tartók igénybevételi ábráit, melyek a korábban tanultak alapján könnyen elkészíthetők.

4.7.1. Koncentrált erőkkel terhelte befogott tartó

A 66. ábrán két koncentrált erővel terhelte tartó látható és a továbbiakban ennek határozzuk meg az igénybevételi ábráit.



66. ábra

Befogott tartó igénybevételi ábrái koncentrált erők hatásakor

A tartóra csak függőleges (y irányú) erők hatnak, ezért az A jelű befogásnál is csak függőleges reakcióerő (F_A) ébred. A reakcióerő meghatározása céljából szerkesszük meg a vektorsokszöget. Mivel egyensúly van, ezért az F_1 és F_2 erők összegével egyenlő nagyságú, de ellentétes értelmű F_A erő ébred. Ennek ismeretében a nyíróra már megrajzolható. A vektorsokszög alapján elkészítve a kötélsokszöget, látjuk, hogy az nem záródik, ami azt jelenti, hogy a befogásnál egy M_A nyomaték ébred.

A feladatot a következőkben számítással is megoldjuk, ehhez három egyenletet, két vetületi és egy nyomatéki egyenletet használunk.

$$\Sigma F_{iz} = 0 \text{ (teljesül, mert } z \text{ irányú erő nincs).}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = -F_2 - F_1 + F_A,$$

innen:

$$F_A = 3F. \quad (\uparrow)$$

$$\Sigma M_i^{(A)} = 0 = F_2 l + F_1 \frac{l}{2} - M_A = 2Fl + F \frac{l}{2} - M_A,$$

ahonnan:

$$M_A = \frac{5}{2} Fl, \quad (\curvearrowright)$$

illetve a nyomatéki metszék:

$$m_A = \frac{5Fl}{2H}.$$

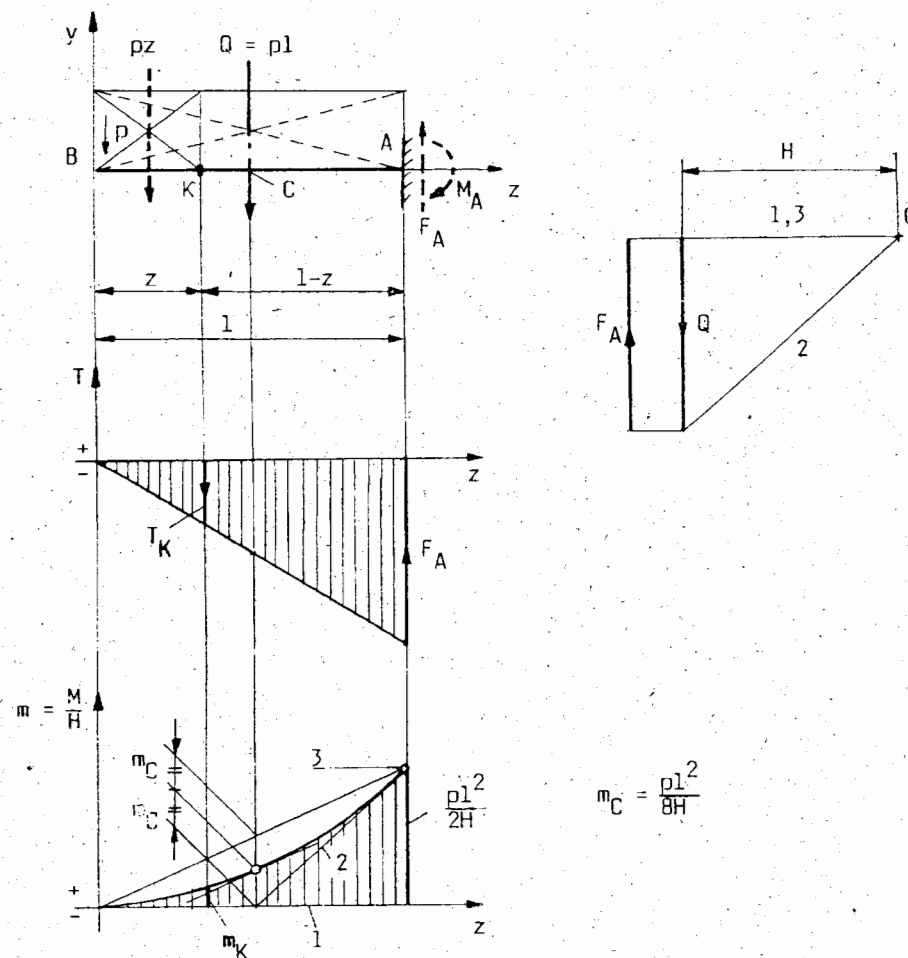
4.7.2. Egyenletesen megoszló terhelésű befogott tartó

A 67. ábrán egyenletesen megoszló terhelésű befogott tartó látható. Mivel a tartóra csak függőleges irányú megoszló terhelés hat, ezért a befogásnál is csak ilyen reakcióerő (F_A) ébred, melynek nagyságát a vektorsokszög alapján meg tudjuk határozni és elkészíthetjük a nyíróerő ábrát is, ami esetünkben a befogásnál ébredő F_A értékéről a tartó hossza mentén lineárisan zérusra csökken, vagyis a B keresztmetszetenél a tartóvég nyírásmentes.

A vektorsokszög alapján elkészítjük a kötélsokszöget. A megoszló terhelésnél tanultakat felhasználva tudjuk, hogy az 1-es és a 2-es kötéloldál a nyomatéki metszések változását leíró parabola két érintője a szabad tartóvégen, illetve a befogásnál. Ennek ismeretében a parabola egyszerűen szerkeszthető és a megfelelő metszések leolvashatók.

A továbbiakban felírjuk egy tetszőleges K keresztmetszetben ébredő nyíróerő illetve hajlítónyomaték értékét. A nyíróerő:

$$T_K = -pz.$$



67. ábra

Egyenletesen megoszló terhelésű befogott tartó igénybevételi ábrái

Mivel a K keresztmetszet tetszőleges lehet, ezért a tartó hossza mentén keresztmetszetről keresztmetszetre meg tudjuk határozni a nyíróerő értékét, ami lineárisan változik. A nyomaték értéke a K keresztmetszetben:

$$M_K = (pz) \frac{z}{2} = \frac{pz^2}{2}.$$

A maximális nyomaték a befogásnál (a $z=l$ helyen) ébred, értéke:

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{2},$$

ebből a nyomatéki metszék

$$m_{\max} = \frac{pl^2}{2H}.$$

Eddig az igénybevételi ábrákat mindig úgy építettük fel, hogy egyszerre vizsgáltuk valamennyi terhelés hatását. A továbbiakban megismerkedünk egy olyan elvvel (a szuperpozícióval), ami lehetővé teszi egy adott tartónál a terhelések külön-külön történő vizsgálatát.

4.8. Az igénybevételi ábrák szerkesztése a szuperpozíció elve alapján

Könnyen beláthatjuk, hogy minden összetett terhelésű tartó felbontható egyszerűbb tartókra és a reakcióerők, valamint az igénybevételi ábrák az egyszerűbb terhelésű tartók reakcióerőinek és igénybevételeinek algebrai összegeként állíthatók elő. Ezt az elvet összegezés vagy *szuperpozíció elvének* nevezzük.

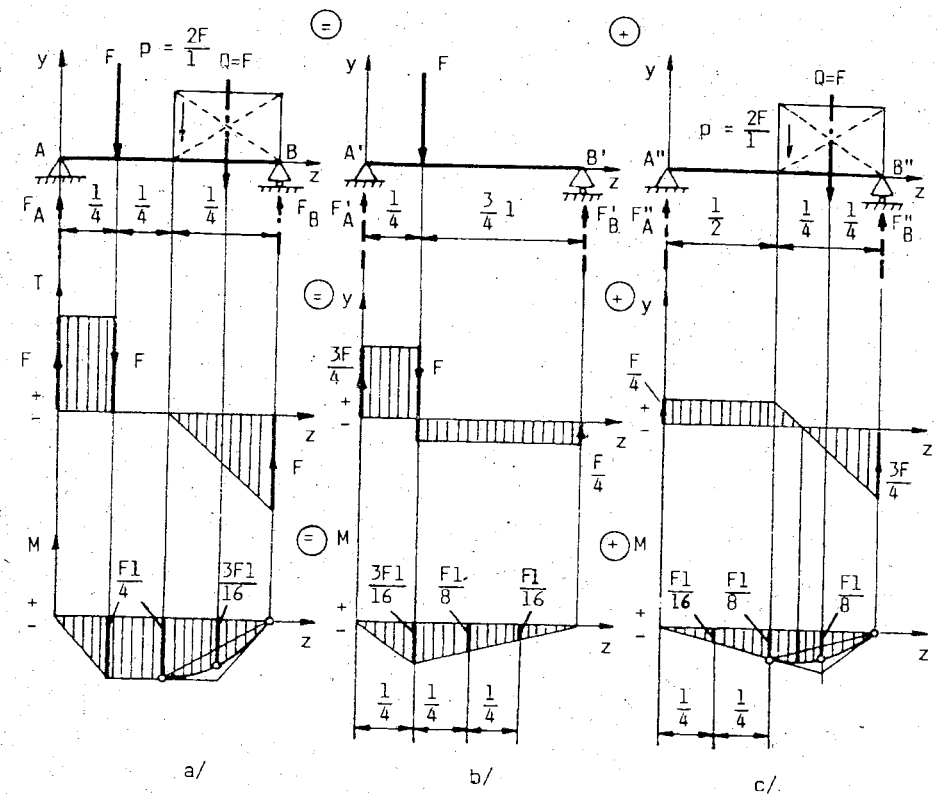
A feladatok így történő megoldása teljes mértékben az eddigi megismert módszereken alapul és a az alkalmazást a 68. ábrán látható kéttámaszú tartón mutatjuk be.

A 68.a ábrán felül egy olyan kéttámaszú tartót látunk, melyre egy koncentrált erő és megoszló terhelés hat. Ezt a tartót szétbontottuk két olyan tartóra, hogy az egyiknek csak a koncentrált erő, a másikon pedig csak a megoszló terhelés legyen (68.b, 68.c ábra). Ezután külön-külön megszerkesztettük a két tartó igénybevételi ábráit és összegeztük őket. Eredményül a 68.a ábrán látható nyírőerő és nyomatéki ábrát kaptuk. (A megfelelő metszések értékét számításal egyszerűen ellenőrizhetjük.)

Az igénybevételi ábrák szerkesztésére, illetve számítására megismert módszereket összetettebb tartókra és terhelésekre is értelemszerűen alkalmazhatjuk, így tisztázni tudjuk valamely elem igénybevételeit és megkereshetjük a veszélyes keresztmetszeteket. A továbbiakban, az eddigi ismereteink felhasználásával elkészítjük egy törtvonalú (törttengelyű) tartó igénybevételi ábráit.

4.9. Törtvonalú tartók igénybevételi ábrái

A 69. ábrán látható síkbeli befogott tartót a síkjába eső erőrendszer terheli. Az igénybevételi ábrákat az A pontból kiindulva az „s” ívkoordináta függvényében rajzoljuk meg, figyelembe véve az 51. ábrán értelmezett előjelszabályt. Ebből a célból a tartót egyenesítjük ki. Az A-D szakaszon jelöljük be a töréspontokat és a terhelések szempontjából jellegzetes pontokat (1, 2, 3). A terhelésből láthatjuk, hogy a tartó egyes szakaszait normálerő, nyírőerő illetve hajlítónyomaték terheli, ennek megfelelően ezeket az igénybevételeket kell megrajzolni az ívkoordináta függvényében.



68. ábra

Az igénybevételi ábrák szerkesztése a szuperpozíció elve alapján

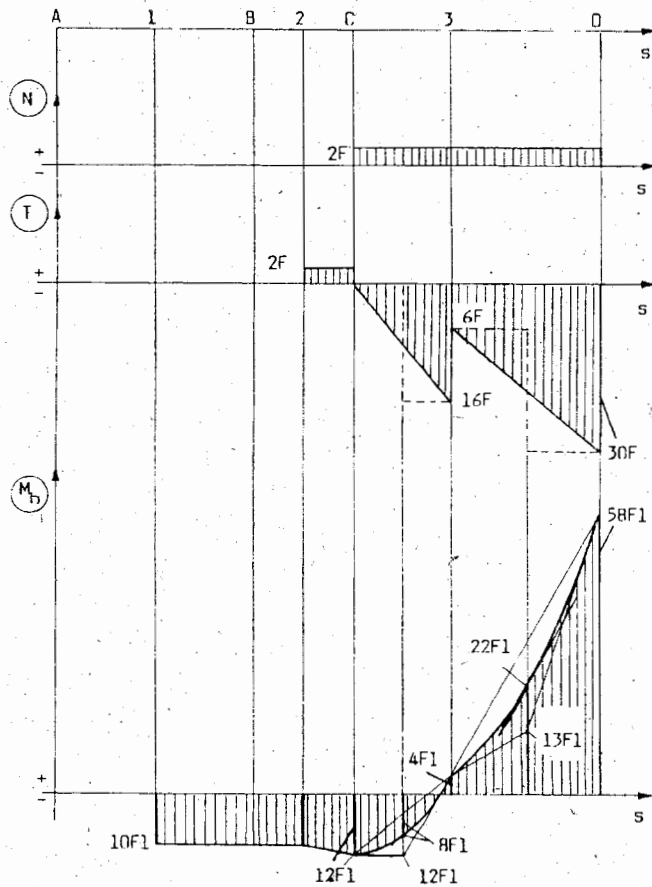
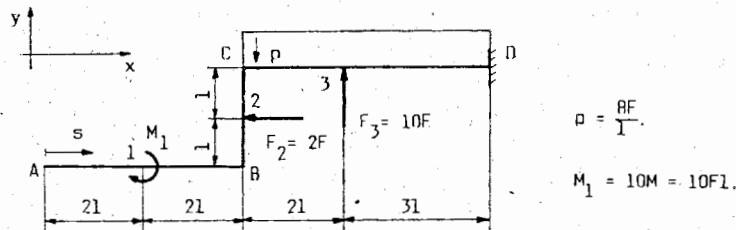
A D pontban ébredő reakcióerők egyenlők a megfelelő igénybevételi ábrák e pontbeli metszékével.

Normálerő ábra

A 69. ábráról látható, hogy az A-B, illetve B-C szakaszon rúdirányú erő nincs. A 2-es pontban támadó F_2 erő csupán a C ponttól kezdve eredményez húzóerőt a C-D szakaszon és értéke állandó $2F$.

$$\sum F_{ix} = 0 = -F_2 + F_D,$$

$$F_D = F_2 = 2F \quad (\rightarrow).$$



69. ábra
Befogott törtvonalú tartó igénybevételi ábrái

Nyíróerő ábra

A nyíróigénybevételt a rúd középvonalára merőleges erők okozzák. Az A pontból kiindulva látjuk, hogy a 2-es jelű pontig nincs nyírást okozó erő. A 2-es ponttól a C-ig az $F_2=2F$ nagyságú erő okozza a pozitív előjelű nyírást. Az előjel onnan látható, hogy a 2-C szakaszon bárhol kiragadunk az ívkoordináta mentén egy elemi Δs hosszúságú szakaszt és megkeressük ennek megfelelőjét a kiterített rúdon, azt látjuk, hogy a Δs szakasz baloldalán működő nyíróerő felfelé mutat és ez pozitív igénybevételnek felel meg. A C-D szakasz nyíróerő ábráját hasonlóképpen tudjuk megrajzolni. A C pontban a nyíróerő ábra zérus értékről indul, mivel az A-C szakaszcól nem adódik át a C-D rúdszakaszra merőleges erő. A $p=8F/l$ intenzitású megoszló erőrendszerből adódóan a negatív igénybevétel a 3-as pontig lineárisan változik ($-16F$ értékig). A 3-as pontban lecsökken ($-6F$ -re) és utána értéke ismét lineárisan változik $-30F$ -ig. Ezt az értéket számítással ellenőrizhetjük:

$$\sum F_{iy} = 0 = -5pl + F_3 + F_D,$$

$$F_D = 5pl - F_3 = 40F - 10F = 30F \quad (\uparrow)$$

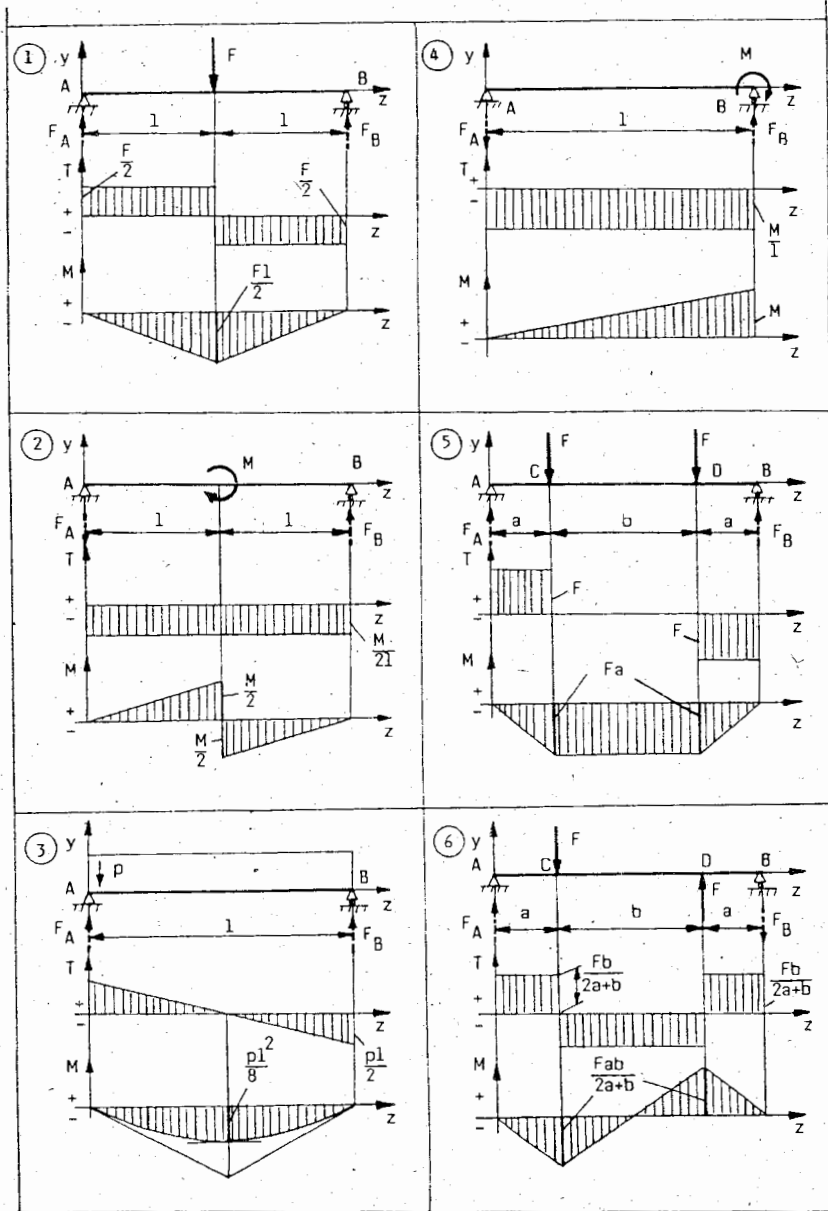
Nyomatéki ábra

A nyomatéki ábrát az eddig tanultak felhasználásával egyszerűen meg tudjuk rajzolni. Az A-1 szakaszon nincs hajlító igénybevétel, az 1-es ponttól kezdve azonban az $M_1=10M=10Fl$ nyomaték egészen a 2-es jelű pontig negatív hajlítóigénybevételt okoz. A 2-es pontban ható $F_2=2F$ erő ezt az állandó értéket lineárisan változtatja a C pontig, ahol a hajlító igénybevétel $-12Fl$. A C-D szakaszt egy olyan befogott tartóként vizsgálhatjuk, melynek C pontjában negatív hajlítóigénybevételt okozó $-12Fl$ nagyságú hajlítónyomaték hat. A nyomatéki ábrát a C-D szakaszon a nyíróerőábra segítségével területintegrálással határozzuk meg. A C-3 szakaszon a háromszög alakú területet egy olyan téglalappá alakítjuk, amelynek területe megegyezik a háromszögével ($0,5 \times 2l \times 16F = 1 \times 16F$). Látjuk, hogy a C-3 szakasz feléig az átalakított nyíróerőábra zérus értékű, a szakasz felétől pedig „F” hosszon $16F$ értékű. Így a nyomatéki ábrában a C-3 szakasz feléig nincs változás, onnan pedig a C pontig a nyomatéki ábra lineárisan változik $4Fl$ értékig, amit úgy kapunk meg, hogy a $-12Fl$ értékhez hozzáadjuk a nyíróerőábra területének -1 -szeresét, a $16Fl$ -et. Ezután a $-12Fl$ értékű metszék végpontját össze kell kötni a $4Fl$ metszék végpontjával és a parabolaszakaszt a szabályai szerint megrajzolhatjuk most már a nyomaték tényleges változásának jellegét leíró parabolát. (Visszatérünk arra az esetre, amikor a nyíróerőábra a C-3 szakaszon lineárisan változik.) A nyomatéki ábrának a 3-as pontban törése van, mivel itt az $F_3=10F$ nagyságú erő hat. A 3-D szakaszon a nyomatéki ábrát az előzőekben leírt módon rajzolhatjuk meg. A D pontbeli reakciónyomaték értékét e ponton átmenő tengelyre felírt nyomatéki egyenlettel határozhatjuk meg:

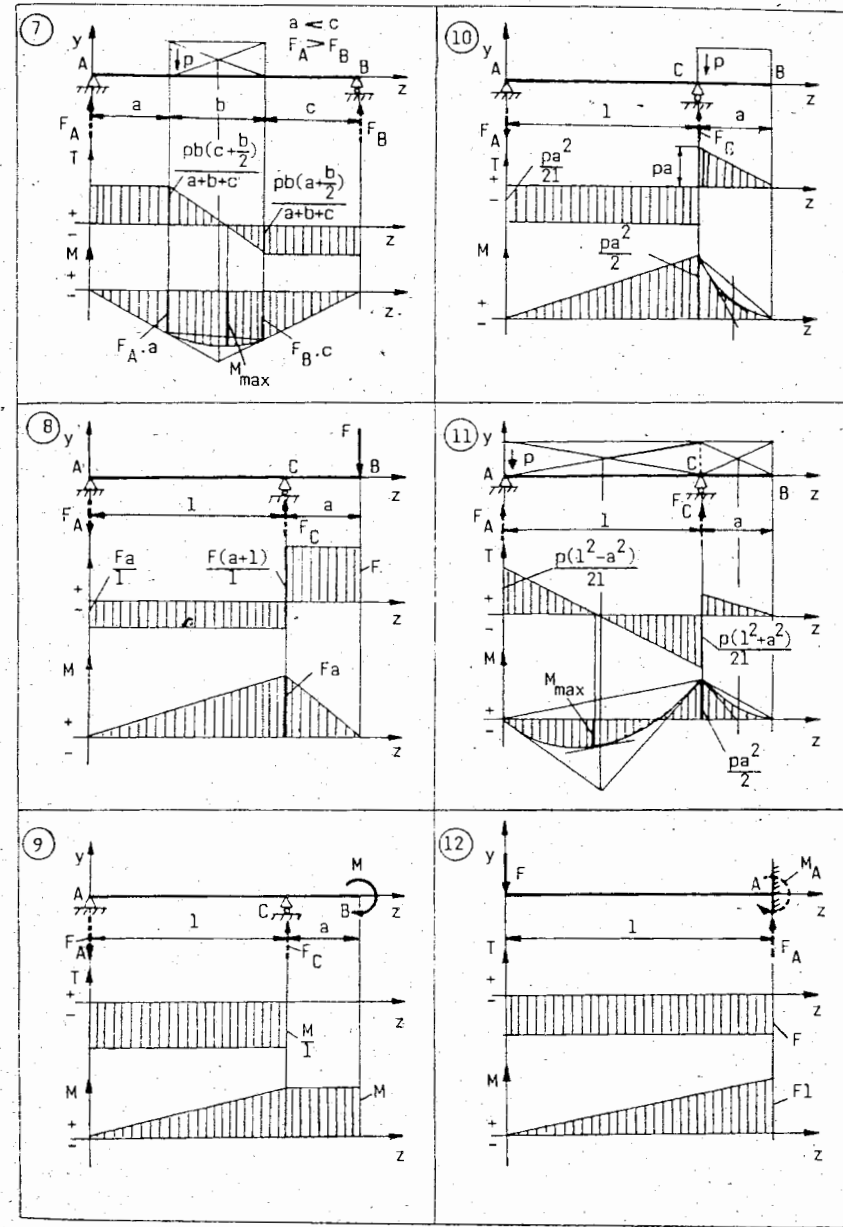
$$\sum M_i^{(D)} = 0 = -M_1 - F_2 \cdot l - F_3 \cdot 3l + 5pl \frac{5l}{2} - M_D,$$

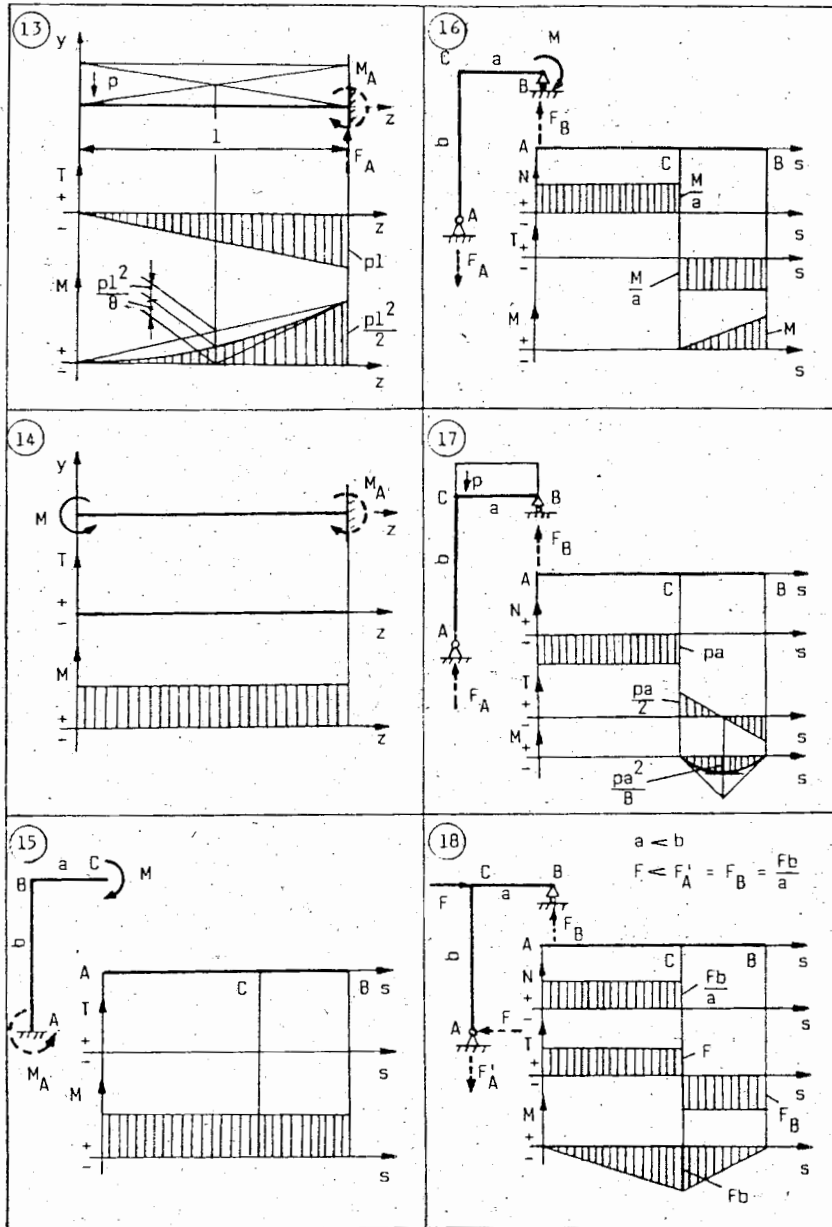
$$M_D = -10Fl - 2Fl - 30Fl + 100Fl = 58Fl \quad (\uparrow)$$

3. táblázat
Tartótipusok igénybevételi ábrái



3. táblázat folytatása





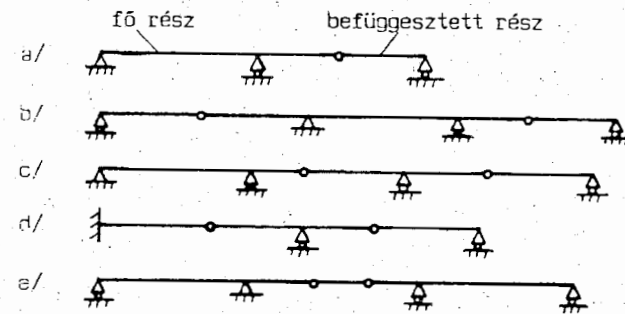
A bemutatott példából láthatjuk, hogy a törtvonalú tartók igénybevételi ábráit az egyenesvonalú tartóknál megismert eljárás szabály értelemszerű használatával meg tudjuk rajzolni. Amennyiben a tartónak ferde szakaszai is vannak, akkor a terheléseknek képezni kell a tartóirányú, ill. arra merőleges vetületét és így tudjuk megrajzolni az igénybevételi ábrákat.

A 3. táblázatban összefoglaljuk a leggyakrabban előforduló tartók néhány jellegzetes igénybevételét, amelyek segítségével sok esetben szuperpozícióval bonyolult terhelések mellett is megrajzolhatók az igénybevételi ábrák. Az ábrákon szaggatott vonallal a reakcióerőket és a nyomatékokat is feltüntettük.

4.10. A csuklós többtámaszú tartó (Gerber-tartó)

Az összetett tartók egy bizonyos csoportját képezik a csuklós többtámaszú tartók, vagy más néven Gerber-tartók, amelyek egyenes tengelyű rudakból állnak és egymásután sorban csuklókkal kapcsolódnak, valamint különböző kényszerekkel vannak rögzítve (70. ábra). A támaszok és a csuklók úgy vannak elhelyezve, hogy az alakzat merev, de felesleges támaszok nincsenek, így elmondhatjuk, hogy *statikailag határozottak*.

A 70. ábrán látható, helyesen felépített Gerber-tartóknál az a.), b.) c.) esetben kéttámaszú tartóhoz kapcsolunk mozgó saruval alátámasztott tartószakaszokat, az e.) esetben pedig kéttámaszú tartók közé befüggesztettünk egy újabb rudat. A d.) esetben viszont a c.) ábra baloldali kéttámaszú tartóját konzolos tartóval helyettesítettük.

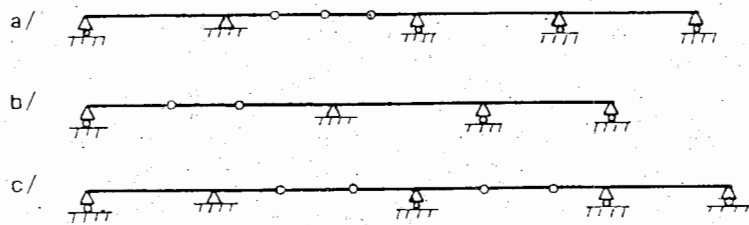


70. ábra
Gerber-tartók

A Gerber-tartók ún. *fő részből* és *befüggesztett részből* állnak, amelyeket csuklók választanak el egymástól. A fő részek önmagukban is megállnak, a befüggesztett részek azonban nem. A 70. ábrán az első tartónál bejelöltük a fő részt és a befüggesztett részt. Összetettebb tartóknál természetesen több fő rész ill. befüggesztett rész is előfordulhat.

Abból a célból, hogy a Gerber-tartók labilitását elkerüljük, be kell tartani a következő szabályokat (71. ábra):

- egy nyílásba kettőnél több csukló ne kerüljön (a. ábra),
- szélső támaszkörbe ne essen két csukló (b. ábra),
- két szomszédos nyílásba 2-2 csukló ne kerüljön (c. ábra).



71. ábra
Labilis Gerber-tartók

A Gerber-tartók reakcióerőinek meghatározásához a befüggesztett részből kell kiindulni, melynek reakcióit egyszerűen ki tudjuk számítani, ennek ismeretében pedig meghatározható a fő rész erőjátéka is.

A továbbiakban számítsuk ki a 72. ábrán látható Gerber-tartó reakcióerőit és rajzoljuk meg az igénybevételi ábráit!

Első lépésként kiemeljük a befüggesztett részt, a $C-D$ szakaszt, melynek csuklóerőit jelöljük F_C -vel ill. F_D -vel.

Az F_C ill. F_D erőt a D , ill. a C ponton átmenő, x irányú tengelyre felírt nyomatéki egyenlethől tudjuk meghatározni:

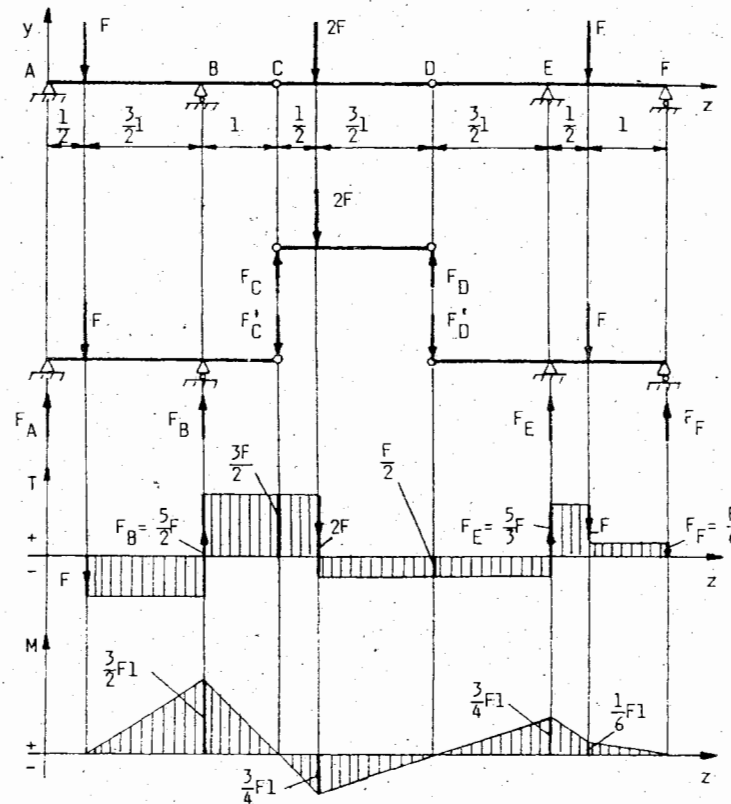
$$\Sigma M_i^{(D)} = 0 = F_C \cdot 2l - 2F \frac{3}{2}l,$$

$$F_C = \frac{3}{2}F \quad (\uparrow);$$

$$\Sigma M_i^{(C)} = 0 = 2F \frac{l}{2} - F_D \cdot 2l,$$

$$F_D = \frac{F}{2} \quad (\uparrow).$$

A $C-D$ szakasznak a ráható erők hatására egyensúlyban kell lennie, amit egyszerűen ellenőrizhetünk. A továbbiakban meghatározzuk az $A-C$, illetve a $D-F$ szakasz reakcióerőit. Ebből a célból nem szabad megfeledkezni arról, hogy a C ill. a D pontban a befüggesztett részből a fő részre az F_C és F_D erővel ellentétes értelmű F_C' és F_D' erő adódik át, ugyanis az $A-C$, ill. a $D-F$ tartórésznek fel kell venniük a befüggesztett részből rájuk átvitt $2F$ nagyságú terhelést. Először meghatározzuk az $A-C$ tartó reakcióerőit az F_A -t és F_B -t, ebből a célból nyomatéki egyenletet írunk fel a B ill. A ponton átmenő, a rajz síkjára merőleges tengelyre:



72. ábra
Gerber-tartó igénybevételi ábrái

$$\Sigma M_i^{(B)} = 0 = F_A \cdot 2l - F \frac{3}{2}l + F_C' l = 2F_A l - 1,5Fl + 1,5Fl,$$

$$F_A = 0;$$

$$\Sigma M_i^{(A)} = 0 = F \frac{l}{2} - F_B \cdot 2l + F_C' \cdot 3l = \frac{1}{2} Fl - 2F_B l + \frac{9}{2} Fl,$$

$$F_B = \frac{5}{2}F \quad (\uparrow).$$

Az $A-C$ tartószakasznak a ráható erők hatására egyensúlyban kell lennie, amiről az y irányú vetületi egyenlet felírása után meggyőződhetünk:

$$\Sigma F_{iy} = F_A - F + F_B - F_C' = 0 - F + \frac{5}{2}F - \frac{3}{2}F = 0.$$

A D-F szakasz F_E és F_F reakcióerőinek meghatározása:

$$\Sigma M_i^{(F)} = 0 = -F_D' 3l + F_E \frac{3}{2}l - Fl = -\frac{3}{2}Fl + \frac{3}{2}F_E l - Fl,$$

$$F_E = \frac{5}{3}F \quad (\uparrow);$$

$$\Sigma M_i^{(E)} = 0 = -F_D' \frac{3}{2}l + F \frac{l}{2} - F_F \frac{3}{2}l = -\frac{3}{4}Fl + \frac{1}{2}Fl - \frac{3}{2}F_F l,$$

$$F_F = -\frac{F}{6} \quad (\downarrow), \text{ a feltételezettel ellentétes értelmű.}$$

A D-F tartószakasz egyensúlyáról y irányú vetületi egyenlettel szintén meggyőződhetünk. A reakcióerők ismeretében megrajzolhatjuk a *nyíróerő ábrát*, amelyben a tartóra ható koncentrált erők támadáspontjában ugrás jelentkezik, a C, D pontban ható belső erők természetesen *nem okoznak változást*. A nyomatéki ábrát az eddig tanultak alapján szintén el tudjuk készíteni, ennél azonban teljesülnie kell az

$$M_C = 0, M_D = 0$$

feltételnek, hiszen a *csukló nem képes nyomatékot átvinni*. Erről meggyőződhetünk a megfelelő nyomatéki egyenletek felírásával is:

$$\Sigma M_i^{(C)} = -F \frac{5}{2}l + F_B l = -\frac{5}{2}Fl + \frac{5}{2}Fl = 0,$$

$$\Sigma M_i^{(D)} = -F_E \frac{3}{2}l + F 2l + F_F 3l = -\frac{15}{6}Fl + 2Fl + \frac{3}{6}Fl = 0.$$

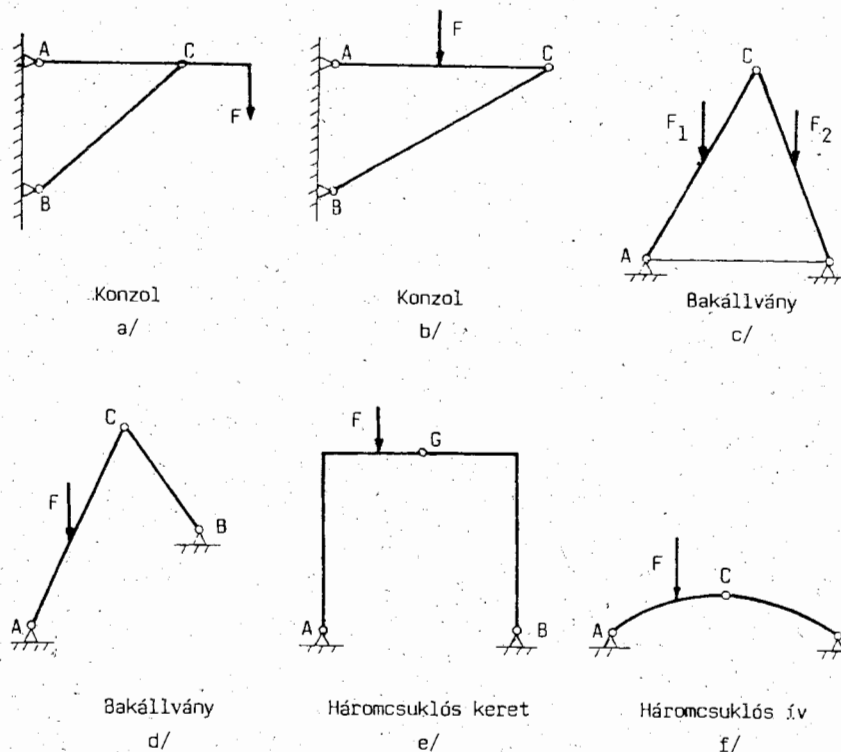
A fentiekből látható, hogy a Gerber-tartók számítása lényegét tekintve nem tér el a csuklós megtámasztású ill. befogott tartókétól, csupán a kényszereknél tanultakat felhasználva azt kell figyelembe venni, hogy a csukló nem viszi át a nyomatékot.

A továbbiakban megismerkedünk egy olyan szerkezettípussal, a háromcsuklós szerkezettel, ami szintén csuklókból és rudakból épül fel.

4.11. A háromcsuklós szerkezet

A háromcsuklós szerkezet úgy állítható elő, hogy két merev testet egymáshoz csuklóval kapcsolunk és a merev testek másik végét pedig a földhöz (falhoz) rögzítjük egy-egy csuklóval (73. ábra). A csuklós szerkezet rúdjai nemcsak a csuklós végen kaphatnak terhelést, hanem tetszőleges más helyen is. Előfordulhat az is, hogy a rudak nem a végeiken kapcsolódnak egymáshoz (73.a ábra). Ekkor a vízszintes rúd a C pontban megszakítás nélkül foly-

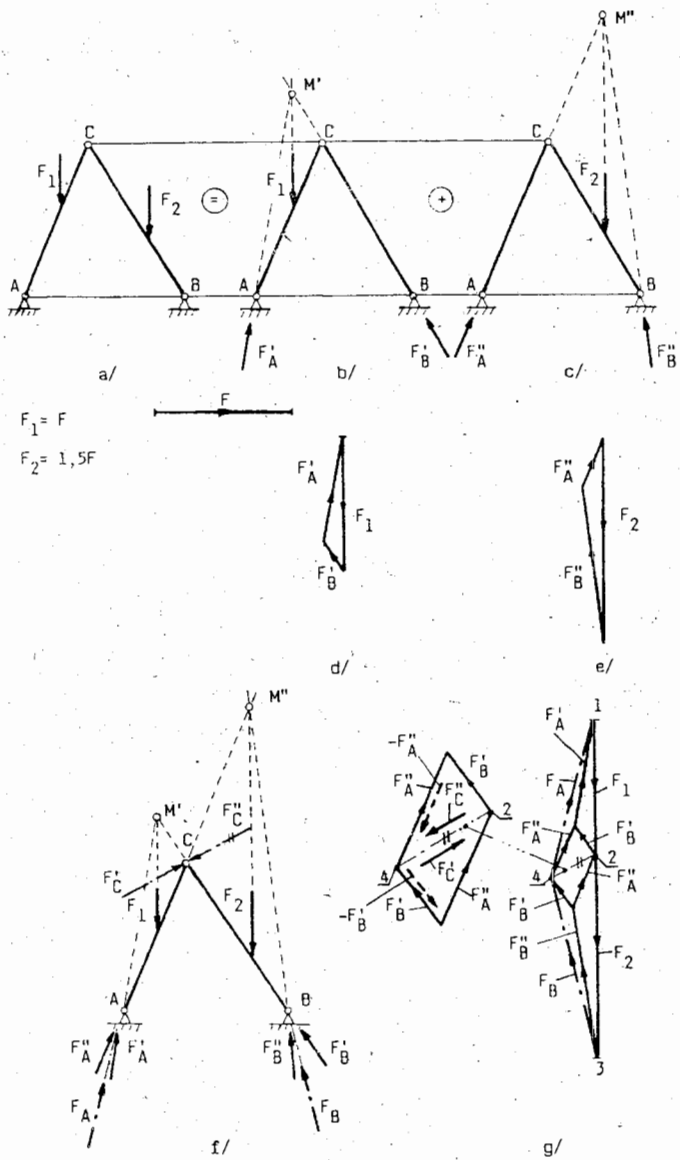
tatódik és az F erő hajlításának is ellenáll. A háromcsuklós szerkezetek statikailag határozottak, vagyis az ismeretlenek a felírható független statikai egyenletekből egyértelműen meghatározhatók.



73. ábra
Háromcsuklós szerkezetek

A háromcsuklós szerkezetek közül részletesebben a bakállvánnyal foglalkozunk (73.c ábra). E szerkezettípusok mind szerkesztéssel, mind pedig számítással vizsgálhatók. A szerkesztés nehézségét az okozza, hogy az A és a B pontban ébredő reakcióerők általában ferde hatásvonalúak. E nehézséget úgy tudjuk kiküszöbölni, hogy külön-külön vizsgáljuk az egyes terhelések hatását és az eredményeket összegezzük (szuperpozíció elve). A továbbiakban egy olyan bakállvánnyt vizsgálunk, amelynek támaszai (az A és B csuklók) egy magasságban vannak és a C csukló terheletlen (74. ábra).

A terhelőerők (F_1 és F_2) az egyes rudakra a csuklók között hatnak. A feladatot szerkesztéssel, a szuperpozíció elvével oldjuk meg, ami azt jelenti, hogy az erők együttes hatása megegyezik a külön-külön vett erőhatások összegével. Először bontsuk két részre a



74. ábra
A bakállvány reakcióerőinek meghatározása

terhelést és vizsgáljuk meg úgy a bakállványt, hogy csak az F_1 erő hat (74.b ábra), ill. csak az F_2 erő hat (74.c ábra). Amennyiben az F_1 erő hat, akkor a $B-C$ rúd terheletlen, és benne csak rúdírányú erő ébred. Ennek ismeretében elmondhatjuk, hogy az $A-C$ rúdra az ismeretlen nagyságú $B-C$ irányú erő, az ismert nagyságú és hatásvonalú F_1 erő, valamint az A pontban ébredő reakcióerő hat. Az $A-C$ rúdnak egyensúlyban kell lennie, így a ráható három erő hatásvonalának egy pontban kell metsződnie, vagyis az F_1 erő és a $B-C$ irányú rúderő hatásvonalának metszéspontján (M') át kell mennie az F_A' reakcióerő hatásvonalának. Az erők hatásvonalának és az F_1 erő nagyságának ismeretében, a megadott lépték felhasználásával megrajzoljuk a vektorháromszöget (74.d ábra), amelyből leolvasható az F_A' és F_B' reakcióerő. Hasonlóképpen szerkeszthető meg az F_2 terhelés esetén érvényes vektorháromszög is (74.e ábra), ugyanis tudjuk, hogy az $A-C$ rúdban csak rúdírányú erő ébred és hatásvonalának az F_2 erő hatásvonalával való metszéspontja (M'') meghatározza a B pontba ébredő F_B'' reakcióerő hatásvonalát (74.c ábra). Mivel mindkét erő egyszerre hat a bakállványra, ezért a két esetben kapott reakcióerők eredője ébred, tehát meg kell határozni az F_A' és F_A'' ill. F_B' és F_B'' erők eredőjét. A 74.f ábrán látható bakállvány vektorábráját úgy kapjuk meg, hogy a 74.d és a 74.e ábra vektorháromszögeit egyberajzoljuk (74.g ábra).

A C csuklóerő meghatározásához tudnunk kell, hogy eme csuklóra két ellentétes értelmű és egyenlő nagyságú erő hat (a jobboldali, illetve a baloldali részről), amelyeknek hatására a csukló egyensúlyban van. Vizsgáljuk meg a 74.g vektorábrára felhasználásával, hogy milyen terhelés (F_C') adódik át a baloldali tartórészről a C csukló révén a jobboldalra. A 74.d ábrán látható vektorháromszög a baloldali rész egyensúlyát fejezi ki, ezért a jobboldalra az F_B' erővel ellentétes értelmű $-F_B'$ erő adódik át. A 74.e ábra a jobboldali rész egyensúlyát fejezi ki, így a baloldali rész hatását közvetlenül az F_A'' erő mutatja, tehát a *baloldali részről a C csuklóra az F_B' erővel ellentétes $-F_B'$ és az F_A'' erők vektori összege, az F_C' adódik át.* Hasonló megfontolások alapján szerkeszthető meg a jobboldali részről a C csuklóra átadódó F_C'' erő is.

A háromcsuklós szerkezeteket számítással a vetületi, ill. a nyomatéki egyenletek felhasználásával vizsgálhatjuk.

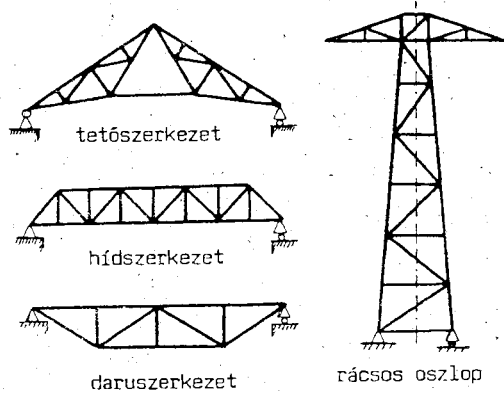
A továbbiakban rátérünk a rácsos tartók tanulmányozására, amelyek idealizált esetben szintén rudakból és csuklókból építhetők fel.

4.12. Síkbeli rácsos tartók

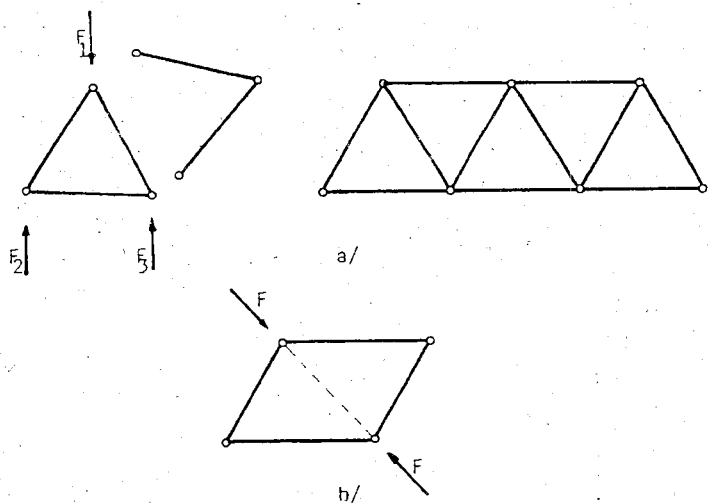
A rácsos tartók olyan rúdszerkezetek, amelyeknek elemei a rudak, egymáshoz csomópontokban kapcsolódnak. E kapcsolódási pontokat számításaink során súrlódásmentes csuklóknak tételezzük fel, jóllehet a csomópont kialakítása úgy történik, hogy az egyes rudakat ún. csomólemezzel kötjük (pl. hegesztéssel vagy szegeccseléssel). Feltételezzük továbbá, hogy az egy csomópontban találkozó egyenes rudak tengelyei egy pontban metszik egymást. A gyakorlati eredmények a csomópont csuklóként való modellezését alátámasztják. Olyan síkbeli rácsos tartókkal foglalkozunk, amelyek terhelése csak a csomópontokban hat és a tartó síkjába esik. Csak egyensúlyi erőrendszerrel terhelt rácsos tartókat vizsgálunk és az egyes rudaknak a terhelés hatására bekövetkezett alakváltozásától eltekintünk. Fontos

számunkra, hogy a rudak alkotta alakzat belső felépítés szempontjából stabil, vagyis merev. A 75. ábra néhány gyakran előforduló rácsos tartó felépítését ismerteti.

Vizsgálatainkat csak a statikailag határozott külső megtámasztással bíró rácsos tartókra terjesztjük ki és így elmondhatjuk, hogy a külső támasztóerők a belső erőkötől függetlenül meghatározhatók. A fenti feltételezések ismeretében elmondhatjuk, hogy a rácsos tartók egyes rúdjaiban csak rúdírányú (húzó \oplus és nyomó \ominus) erők ébrednek.



75. ábra
Néhány rácsos tartó típus



76. ábra
A rácsos tartó származtatása

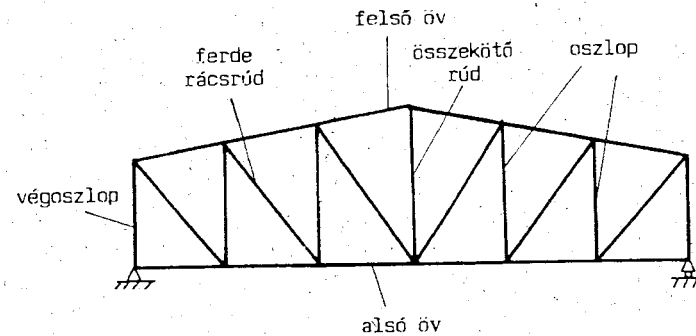
A rácsos tartókat többféleképpen építhetjük fel. Mi a felépítés során azt a tényt vesszük figyelembe, hogy a három rúdból képzett háromszögalakú szerkezet alakját bármilyen terhelés hatására megtartja, ellentétben a négyszög alakzatával. Ily módon egy három rúdból felépített háromszög alakzattól kiindulva két-két rúd hozzáadásával újabb csomópontot, illetve alakzatot hozunk létre (76. ábra), amit egyszerű rácsos szerkezetnek nevezünk.

A rácsos tartók statikai határozottságából következik, hogy a szerkezet reakcióerőinek meghatározásához a síkbeli erők három egyensúlyi egyenlete elegendő. A statikailag határozott és belsőleg stabil (merev) rácsos tartókra a származtatási elv figyelembevételével elmondhatjuk, hogy fennáll az

$$r = 2c - 3$$

összefüggés, ahol r a rudak száma, és c a csomópontok száma.

A rácsos tartók egyes rúdjaikat speciális elnevezéssel illetjük (77. ábra).



77. ábra
A rácsos tartó rúdjaik elnevezése

A rácsos tartók számításakor meg kell határozni az egyes rudakban ébredő erőket, amit

- csomóponti módszerrel
- átmetsző módszerrel és
- a Cremona-erőtér alapján végezhetünk el.

A Cremona-erőtérrel tanulmányaink során nem foglalkozunk, csupán annyit jegyünk meg, hogy amennyiben a szerkesztést a vektorábra alapján bizonyos szabályok szerint végrehajtjuk és a rácsos tartó valamennyi csomópontjának egyensúlyát ábrázoló vektorsokszögeket egyetlen ábrába foglaljuk, akkor a Cremona-erőtérhez jutunk. A továbbiakban rátérünk az első két módszer részletesebb tanulmányozására.

4.12.1. A rúderők meghatározása csomóponti módszerrel

A rúderők csomóponti módszerrel való számításakor abból a feltételből indulunk ki, hogy az egy csomópontban ható külső és belső erők egyensúlyban vannak. Ez az egyensúly

vizsgálható mind grafikus, mindpedig analitikus úton. Számításaink során olyan csomópontból indulunk ki, amelyre egy ismert erő is hat, és legfeljebb két, nem egy egyenesbe eső rúd metsződik benne. E módszert általában akkor használjuk, ha valamennyi rúderőt meg kell határozni, lényegét a 78. ábra kapcsán tekinthetjük át. A rúderőket szerkesztéssel és számítással határozzuk meg. A rácsos tartó csomópontjait számokkal jelöltük, az egyes rudakban ható erőket pedig S betűvel, amelynek első indexe azt mutatja, hogy melyik csomóponttól van szó, a második pedig, hogy melyik a szomszédos csomópont. Első lépésként meg kell határozni a rácsos tartó támasztóerőit, az F_A -t, ill. az F_B -t. Ezt a B , ill. az A ponton áthaladó z irányú tengelyre felírt nyomatéki egyenletből számítjuk. Mivel a terhelés szimmetrikus, ezért nyomatéki egyenletek nélkül könnyen beláthatjuk, hogy

$$F_A = F_B = 3F \quad (\uparrow)$$

Ezután a számítás elkezdése céljából kiválasztjuk az „0” jelű pontot, amelyre az ismert F_A támasztóerő és a két ismert hatásvonalú, de ismeretlen nagyságú S_{0-1} , ill. S_{0-2} erő hat. Az F_A erő megfelelő léptékének felvétele után megrajzolhatjuk az O jelű pont egyensúlyát kifejező vektorháromszöget, amelyből az ismeretlen erők nagysága adódik. Mivel a 78. ábra vektorháromszöge az O jelű csomópont egyensúlyát fejezi ki, ezért az egyes rudakra ezzel ellentétes értelmű erő hat, így az S_{0-2} rúd húzott (+), az S_{0-1} jelű rúd pedig nyomott (-). A rúderőket számítással is meg tudjuk határozni. Jelöljük a 78. ábrán látható S_{0-1} rúderő x irányú összetevőjét X_{0-1} -gyel, illetve az y irányú összetevőjét Y_{0-1} -gyel. Írjuk fel az y irányú vetületi egyenletet.

$$\sum Y_i = 0 = F_A - Y_{0-1},$$

$$Y_{0-1} = F_A = 3F \quad (\downarrow)$$

A vektorháromszög és a 021 háromszög hasonlóságának felhasználásával

$$\frac{X_{0-1}}{Y_{0-1}} = \frac{a}{h_1},$$

innen

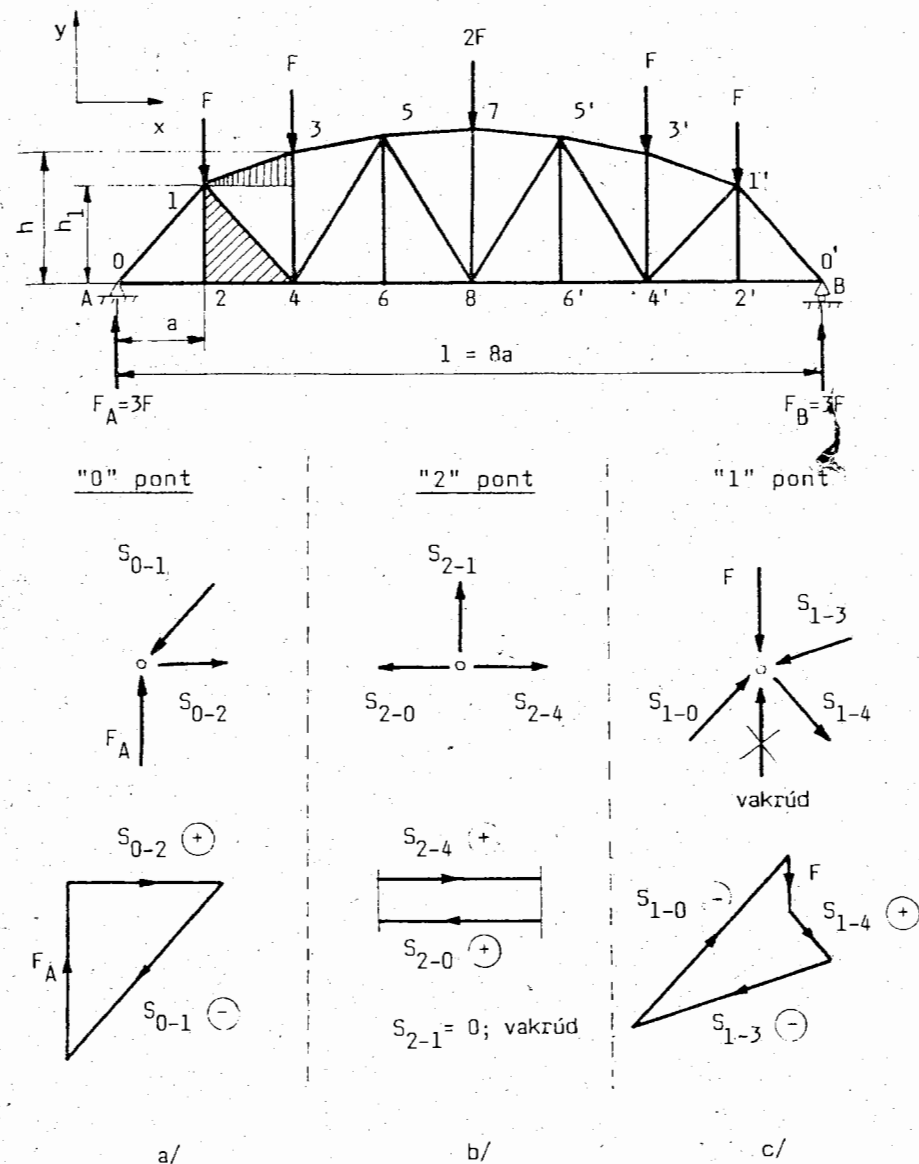
$$X_{0-1} = \frac{a}{h_1} Y_{0-1} = \frac{3aF}{h_1} \quad (\leftarrow)$$

Az S_{0-1} erő nagyságát ezután meg tudjuk határozni

$$S_{0-1} = \sqrt{X_{0-1}^2 + Y_{0-1}^2} = \sqrt{\left(\frac{3aF}{h_1}\right)^2 + (3F)^2} = 3F \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h_1}\right)^2}$$

Az x irányú S_{0-2} erő meghatározása céljából írjuk fel a szükséges vetületi egyenletet:

$$\sum X_i = 0 = S_{0-2} - X_{0-1}, \quad S_{0-2} = X_{0-1} = \frac{3aF}{h_1} \quad (\rightarrow)$$



78. ábra
A csomóponti módszer bemutatása

Ily módon tehát számítással is meg tudjuk határozni a csomópontokra ható erőket.

A „2”-es jelű csomópont vizsgálata lényegesen egyszerűbb. Erre a pontra \bar{a} 0; 4; 1 jelű pontokról adódhat át erő ($S_{2,0}$; $S_{2,1}$; $S_{2,4}$). Vektorsokszöget (háromszöget) nem tudunk rajzolni, mivel látható, hogy csomóponti egyensúly csak úgy állhat fenn, ha $S_{2,1}=0$, ugyanis nincs olyan y irányú erő, ami ezt ellensúlyozná. Azt a rudat, amelyikben nem ébred erő, vakrúdnak nevezük. A szerkesztésből látható, hogy a „2”-es csomópontra ható $S_{2,4}$, ill. $S_{2,0}$ erőknek egyenlő nagyságúnak és ellentétes értelműnek kell lenniük. Mivel a két erő a csomópont egyensúlyát fejezi ki, ezért a rudakra ezzel ellentétes értelmű belső erő hat, emiatt mindkét rúd húzott (+). A 2-es csomópontot két vetületi egyenlet felhasználásával számítással egyszerűen vizsgálhatjuk:

$$\sum Y_i = 0 = S_{2,1}, \text{ tehát vakrúd,}$$

$$\sum X_i = 0 = S_{2,4} - S_{2,0}, \text{ innen}$$

$$S_{2,4} = S_{2,0} = \frac{3aF}{h_1}.$$

Az „1” jelű csomópontra az F külső erő, ill. a rudak révén a 0; 4; 3 jelű csomópontoktól adódnak át rúderők, mert az 1-2-es vakrúd. A csomópont egyensúlyát tehát a 78.c ábra vektorsokszöge fejezi ki, míg az egyes rudak igénybevételét a fentiek szerint ezen erőkkel ellentétes értelmű rúdirányú erők okozzák. (Az igénybevétel előjelét a 78.c ábra tartalmazza).

Az 1-es csomópontra ható erők számítása céljából bontuk fel az erőket x és y irányú összetevőkre:

az $S_{1,0}$ -at $X_{1,0}$ -ra és $Y_{1,0}$ -ra;

az $S_{1,3}$ -at $X_{1,3}$ -ra és $Y_{1,3}$ -ra;

az $S_{1,4}$ -et $X_{1,4}$ -re és $Y_{1,4}$ -re.

A vetületi egyenletek:

$$I. \sum Y_i = 0 = Y_{1,0} - F - Y_{1,4} - Y_{1,3},$$

$$II. \sum X_i = 0 = X_{1,0} - X_{1,3} + X_{1,4}.$$

A fenti egyenletben az $X_{1,0}$ és $Y_{1,0}$ összetevők ismertek, ui. az $X_{0,1}$ -gyel és az $Y_{0,1}$ -gyel egyenlő nagyságúak, de ellentétes értelműek. Az $X_{1,3}$ és $Y_{1,3}$, ill. $X_{1,4}$ és az $Y_{1,4}$ között a 78. ábrán látható sraffozott háromszögek felhasználásával a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\frac{X_{1,3}}{Y_{1,3}} = \frac{a}{h-h_1}, \text{ innen } X_{1,3} = \frac{a}{h-h_1} Y_{1,3},$$

$$\frac{X_{1,4}}{Y_{1,4}} = \frac{a}{h_1}, \text{ innen } X_{1,4} = \frac{a}{h_1} Y_{1,4}.$$

Miután a megfelelő értékeket ($X_{1,0}$, $Y_{1,0}$, $X_{1,3}$ és $X_{1,4}$) behelyettesítjük az I. és II. egyenletben, kapjuk, hogy

$$I. 2F - Y_{1,4} - Y_{1,3} = 0,$$

$$II. \frac{3aF}{h_1} - \frac{a}{h-h_1} Y_{1,3} + \frac{a}{h_1} Y_{1,4} = 0.$$

Látható, hogy a fenti két egyenlet két ismeretlent ($Y_{1,3}$, $Y_{1,4}$) tartalmaz, amelyeket könnyen meghatározhatunk. Ezután az $X_{1,3}$, ill. az $X_{1,4}$ is számítható, a rúdirányú erőket pedig az

$$S_{1,3} = \sqrt{X_{1,3}^2 + Y_{1,3}^2},$$

ill. az

$$S_{1,4} = \sqrt{X_{1,4}^2 + Y_{1,4}^2}$$

összefüggések alapján határozhatjuk meg.

Az eredményekből látható, hogy további csomópontokat hasonlóképpen vizsgálhatunk, és így csomópontról csomópontra tisztázható a szerkezet erőjátéka.

A következőkben pedig megismerkedünk a másik gyakran használt módszerrel, az átmetszéssel.

4.12.2. A rúderők meghatározása átmetsző módszerrel

Az átmetsző módszer lényegét a 79. ábrán vázolt rácsos tartó segítségével egyszerűen megérthetjük.

Az ábrán látható rácsos tartóra az F_1 , F_2 , F_3 erő hat. Feladatunk, hogy meghatározzuk az $S_{3,4}$, $S_{3,6}$ és $S_{7,6}$ jelű rudakban a rúderők nagyságát és a rudak igénybevételét (húzás, nyomás). Első lépésként ki kell számítani az F_A , F_B támasztóerőket. Mivel a tartóra vízszintes irányú erő (F_2) hat, ezt az A pontbeli álló sarunak kell felvenni:

$$\sum F_{ix} = 0 = F_{AX} - F_2,$$

$$F_{AX} = 2F \quad (\rightarrow).$$

Az F_{AY} -t és az F_B -t nyomatéki egyenletekből számítjuk:

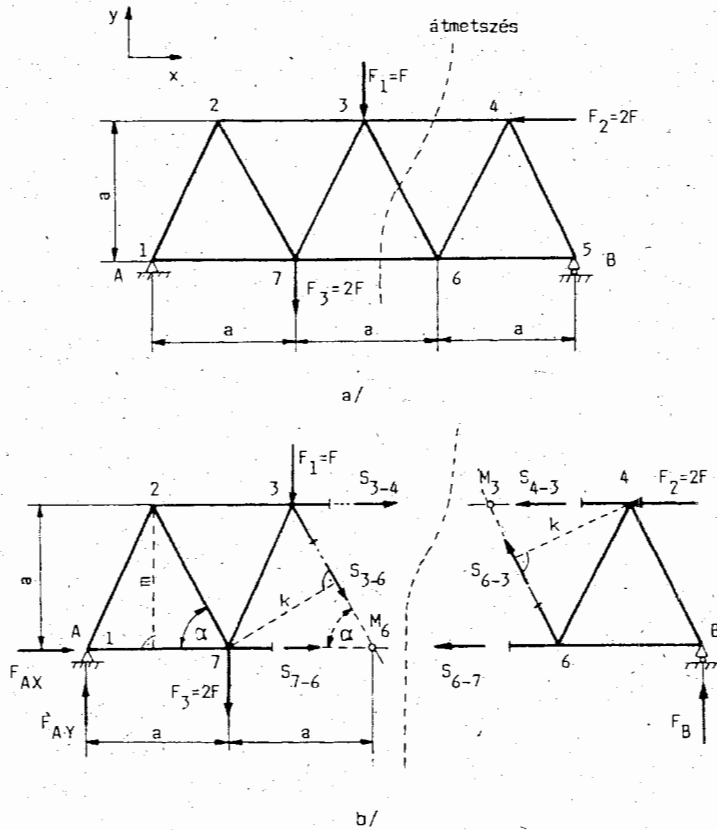
$$\sum M_i^{(A)} = 0 = F_1 \cdot 1,5a + F_3 \cdot a - F_2 a - F_B \cdot 3a,$$

$$F_B = \frac{1,5aF + 2aF - 2aF}{3a} = \frac{1}{2}F \quad (\uparrow).$$

$$\sum M_i^{(B)} = 0 = F_{AY} \cdot 3a - F_3 \cdot 2a - F_1 \cdot 1,5a - F_2 \cdot a,$$

$$F_{AY} = \frac{4aF + 1,5aF + 2aF}{3a} = 2,5F \quad (\uparrow)$$

Miután ismerjük a rácsos tartóra ható külső erőket, hozzákezdhetünk a kérdéses rúderők számításához. Ebből a célból a rácsos tartót gondolatban vágjuk két részre és a két részt távolítsuk el egymástól (79.b ábra). A két rész külön-külön csak úgy lehet egyensúlyban, ha működtetjük az átmetszett rudakban ébredő belső erőket. Átmetszéskor arra kell törekednünk, hogy az átmetszett rudak száma legfeljebb három legyen, és ezek ne metsződjenek közös pontban. Átmetszés után bármelyik részt külön-külön vizsgálhatjuk, célszerű azonban az egyszerűbbet választani. Bármelyik részt is választjuk, a feladat mindig az, hogy három ismeretlen nagyságú, de ismert hatásvonalú erőt kell meghatározni. Ezt megtehetjük szerkesztéssel (Culmann-szerkesztés) és számítással (Ritter-féle számító eljárás).



79. ábra
Rácsos tartó átmetszése

A baloldali rész megtartásával számítsuk ki a rúderőket (S_{3-4} , S_{7-6} , S_{3-6}). Az S_{3-4} erő meghatározása céljából írunk fel nyomatéki egyenletet a másik két (ismeretlen) erő hatásvonalának M_6 jelű metszéspontjára (az M_6 -on áthaladó z irányú tengelyre):

$$\Sigma M_i^{(M_6)} = 0 = F_{AY} \cdot 2a - F_1 \cdot \frac{a}{2} + S_{3-4} \cdot a - F_3 \cdot a,$$

$$S_{3-4} = \frac{-5aF + 0,5aF + 2aF}{a} = -\frac{5}{2}F \quad (\leftarrow),$$

az előjelből látható, hogy a felvétel ellentétes értelmű. A 3-4-es rúdszakasz igénybevétele úgy is eldönthető, hogy gondolatban az átmetszés helyén kiragadunk egy elemi hosszúságú rúdszakaszt és annak vizsgáljuk az egyensúlyát. Esetünkben $\rightarrow \leftarrow S_{3-4}$, tehát nyomott az átmetszett rúd. Az S_{7-6} erőt az S_{3-6} és az S_{3-4} erők 3-as metszéspontján áthaladó z irányú tengelyre felírt nyomatéki egyenletből kapjuk:

$$\Sigma M_i^{(3)} = 0 = -F_{AX} \cdot a + F_{AY} \cdot 1,5a - F_3 \cdot 0,5a - S_{7-6} \cdot a,$$

$$S_{7-6} = \frac{-2aF + 3,75aF - aF}{a} = 0,75F \quad (\rightarrow),$$

és az alsó rudat húzásra veszi igénybe.

Megjegyzés: Ugyanezt az értéket kapjuk akkor is, ha a jobboldali részt vizsgáljuk.

$$\Sigma M_i^{(3)} = 0 = -F_B \cdot 1,5a + S_{7-6} \cdot a,$$

$$S_{7-6} = 0,75F \quad (\leftarrow),$$

($S_{6-7} \leftarrow \rightarrow$ szintén húzott)

A továbbiakban számítsuk ki az S_{3-6} -os rúderő értékét. Az egyik lehetséges módszer, hogy kiszámítjuk a „ k ” kart és nyomatéki egyenletet írunk fel a 7-es ponton átmenő z irányú tengelyre:

$$k = \frac{2}{\sqrt{5}}a, \quad S_{3-4} = \frac{5}{2}F \quad (\leftarrow)!$$

$$\Sigma M_i^{(7)} = 0 = F_{AY} \cdot a + F_1 \cdot 0,5a - S_{3-4} \cdot a(!) + S_{3-6} \cdot k,$$

$$S_{3-6} = \frac{-2,5aF - 0,5aF + 2,5aF}{k} = -\frac{\sqrt{5}}{4}F,$$

a felvétel ellentétes értelmű, és nyomást okoz.

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha az S_{3-6} -os erőt összetevőire bontjuk (X_{3-6} , Y_{3-6}) és az összetevők értékét a megfelelő vetületi egyenletből számítjuk:

$$\Sigma F_{ix} = 0 = F_{AX} - S_{3-4}(!) + X_{3-6} + S_{7-6},$$

$$X_{3-6} = -2F + 2,5F - 0,75F = -0,25F \quad (\leftarrow);$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = F_{AY} - F_1 - Y_{3-6} - F_3,$$

$$Y_{3-6} = 2,5F - F - 2F = -0,5F \quad (\uparrow), \text{ és}$$

$$S_{3-6} = \sqrt{X_{3-6}^2 + Y_{3-6}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}F\right)^2 + \left(\frac{1}{2}F\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4} F.$$

Ezzel tehát meghatároztuk valamennyi átmetszett rúdban az erőket. A gyakorlatban előforduló problémák megoldásakor a két módszert kombináljuk is, hogy minél egyszerűbben juthassunk eredményre.

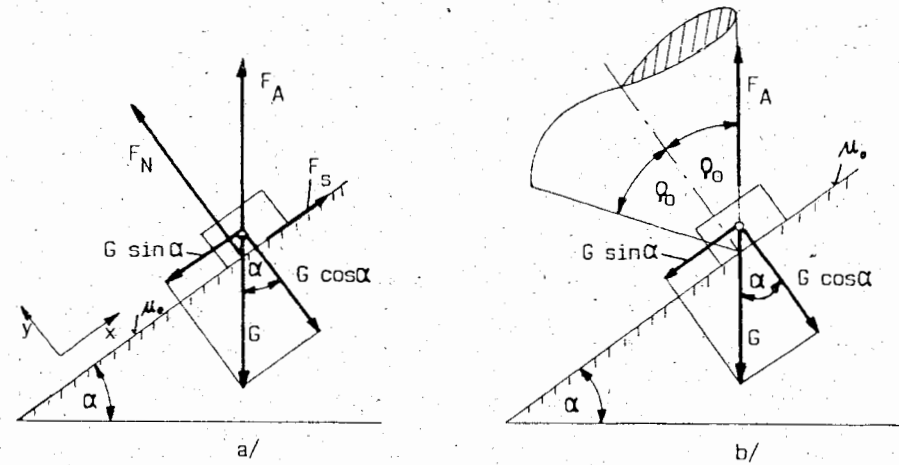
A következőkben megvizsgáljuk a műszaki gyakorlatban rendkívül fontos szerepet játszó súrlódás néhány előfordulását.

5. A SÚRLÓDÁS

5.1. Alapfogalmak

Tapasztalatból tudjuk, hogyha egy testet valamilyen felületen el akarunk mozdítani, ahhoz meghatározott erőt kell kifejteni. Ezt azzal magyarázzuk, hogy a két test között fellép egy erő, amit súrlódó erőnek nevezünk. Vizsgálatainkat arra az esetre korlátozzuk, amikor a két test között nincsen semmiféle kenőanyag, és ekkor ún. száraz vagy Coulomb-féle súrlódásról beszélünk.

A súrlódással kapcsolatos alapfogalmakat egyszerűen megértjük, ha elvégezzük a következő kísérletet. Helyezzünk vízszintes síklapra egy G súlyú testet. Alaphelyzetben az erőegyensúlyt a G súlyerő és a lapról átadódó, vele ellentétes értelmű F_N normálerő biztosítja. Emeljük fokozatosan felfelé a síklapot az egyik éle mentén, és azt tapasztaljuk, hogy ha az a hajlásszög egy bizonyos ρ_0 értéknél nagyobb, akkor a test megcsúszik. Rajzoljuk fel azt az állapotot, amikor $\alpha < \rho_0$, vagyis a test a lejtőn még nem csúszik le (80. ábra).



80. ábra
Erőegyensúly érdes lejtőn

A 80.a ábrán látható testre hat a G súlyerő és az F_A támasztóerő, melyeknek esetén van lejtőirányú és arra merőleges összetevője. A súlyerő a test súlypontjában támad és itt bontjuk fel összetevőire. Az F_A támasztóerő viszont az érintkező testek felszínén támad és itt bontjuk fel összetevőire. A testet pontszerűnek és az erőrendszert közös támadáspontúnak tekintjük, és így írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket:

$$\Sigma F_{ix} = 0 = F_S - G \sin \alpha,$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = F_N - G \cos \alpha,$$

$$F_S = F_N \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = F_N \operatorname{tg} \alpha.$$

innen

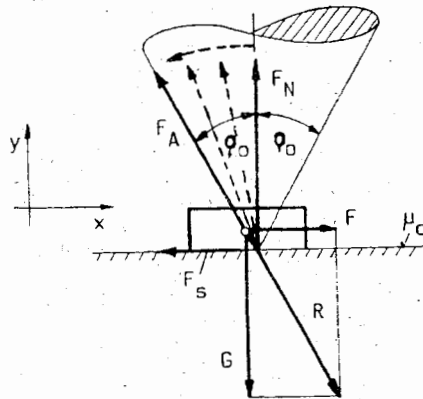
Az eredményből látható, hogy a súrlódási erő és a támasztóerő lejtőre merőleges komponense (a normális erő) között összefüggés áll fenn. *Egyensúly addig áll fenn, míg a lejtő hajlásszöge (α) nem lépi át a ρ_0 határértéket, vagyis $\alpha \leq \rho_0$.* Innen könnyen beláthatjuk, hogy a test nyugalmi helyzetében is ébred súrlódás és ezt a súrlódást *nyugvásbeli súrlódásnak nevezzük*. A nyugvásbeli súrlódási erő értéke éppen akkora, amennyi a test egyensúlyának fenntartásához szükséges. A nyugvásbeli súrlódási erő tehát kisebb a határértéknél vagy azzal még éppen egyenlő:

$$F_S \leq \operatorname{tg} \rho_0 \cdot F_N = \mu_0 F_N.$$

ahol $\mu_0 = \operatorname{tg} \rho_0$ a nyugvásbeli súrlódási tényező. A „0” index azt jelenti, hogy nyugvásbeli súrlódásról van szó. A súrlódási erő az elmozdulást létrehozni kívánó erők eredőjével egyező nagyságú és ellentétes értelmű. A fentiekből következik, hogyha nincs F_N normális irányú erő, akkor nem ébred súrlódási erő sem (pl. függőleges falra helyezett test).

A 80.b ábráról látható, hogy az *elmozdulás határhelyzetében az F_A támasztóerő egy ρ_0 félkúpszögű kúp, az ún. súrlódási kúp palástján helyezkedik el*. Ez a kúp úgy szerkeszthető, hogy a lejtő normálisa körül megrajzoljuk a ρ_0 szöggel a nyugvásbeli súrlódási kúpot.

A továbbiakban vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor egy vízszintes, érdes lapra helyzünk egy G súlyú testet (81. ábra). Ebben az esetben a G súlyerő és az F_N normális erő



81. ábra

Erőegyensúly vízszintes érdes felületen

egyensúlyt tart. Amennyiben a testre vízszintes irányú erő is hat, akkor is lehet egyensúly, ha ez az erő egy meghatározott érték alatt marad. Ebben az esetben a G és F erő R eredőjével az F_A támasztóerő tart egyensúlyt. Ennek az F_A erőnek az összetevője az F_N normális erő és az F_S súrlódási erő. Egyensúly esetén:

$$\Sigma F_{ix} = 0 = F - F_S,$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = -G + F_N.$$

Az F erő növelésekor: *mindaddig, amíg a test meg nem mozdul, az F_A támasztóerő a súrlódási kúp palástján belül helyezkedik el, és az elmozdulás határhelyzetében található a kúp palástján.* (A súrlódási kúp bevezetésével vizsgálatainkat szemléletesebbé, egyszerűbbé tehetjük.)

Amikor a test mozgásnak indul, akkor is ébred súrlódás, amit mozgásbeli súrlódásnak nevezünk. Értékét a nyugvásbeli súrlódási erőhöz hasonlóan lehet számítani. A *mozgásbeli súrlódási erő*, tehát

$$F_S = \mu F_N,$$

ahol $\mu = \operatorname{tg} \rho$ a *mozgásbeli súrlódási tényező*.

Ez az erő a két test relatív sebességével ellentétesen hat. Látható, hogy a mozgásbeli súrlódási erőt egyenlet fejezi ki és nem egyenlőtlenség, mint a nyugvásbeli súrlódási erő értékét. A mozgásbeli és nyugvásbeli súrlódási tényező között a

$$\mu < \mu_0$$

összefüggés áll fenn. Értékeiket táblázatból vehetjük ki.

A μ súrlódási tényező értéke száraz súrlódás esetén függ:

- az egymással érintkező testek anyagától,
- az egymással érintkező testek felületének érdességétől,
- az egymáson elmozduló testek sebességétől.

A 3. táblázatban száraz súrlódásra vonatkozóan néhány értéket találunk.

Az egymással érintkező testek anyaga	Nyugvásbeli súrlódási tényező	Mozgásbeli súrlódási tényező
Acél-acélon	0,14	0,10
Acél-bronzon	0,19	0,18
Acél-jégen	0,027	0,014
Bőr fémen	0,3-0,5	0,3

3. táblázat: A súrlódási tényezők értékei

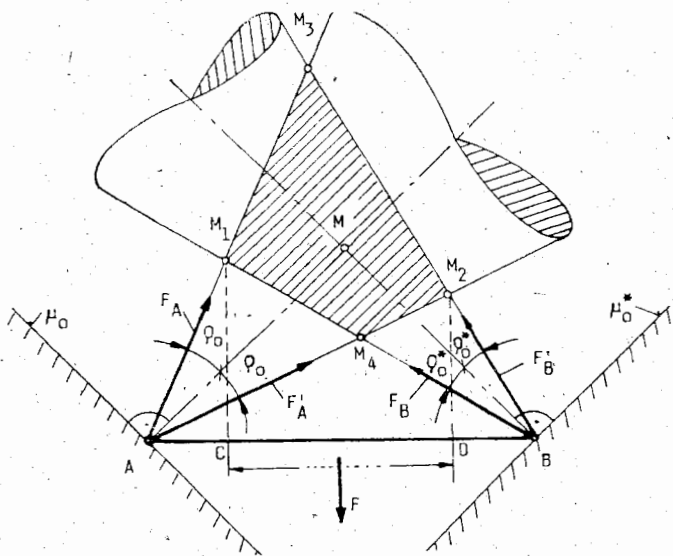
A súrlódási erő értékét ott, ahol nem kívánatos, kenéssel csökkenteni lehet. Vannak olyan esetek viszont, ahol szükséges a megléte. (Gondoljunk csak arra, hogy jeges úton a kis súrlódási tényező miatt nehézkes a közlekedés).

A továbbiakban megvizsgálunk néhány esetet, amikor az egyensúly a súrlódási erő segítségével jön létre.

5.2. Egyensúly súrlódással

Rúd egyensúlya érdes, ék alakú pályán

A 82. ábrán egy olyan rúd egyensúlyát vizsgáljuk, melyre F erő hat és a rúd végeivel különböző súrlódási tényezővel (μ_0, μ_0^*) rendelkező ék alakú pályára támaszkodik az A , ill. a B pontban.



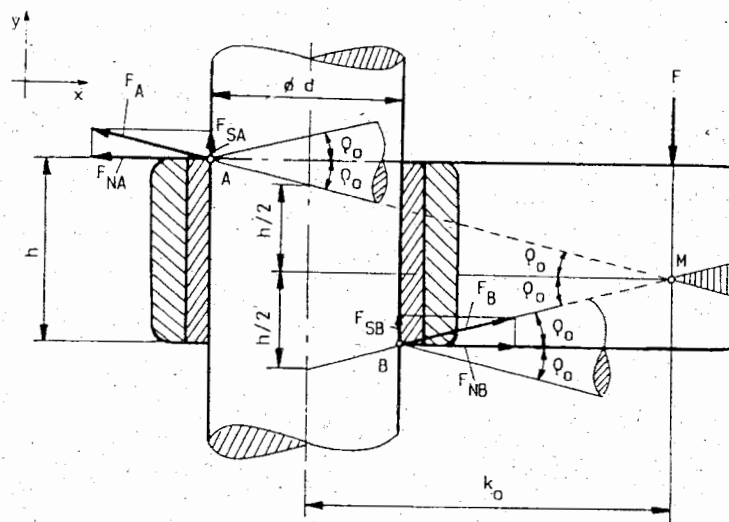
82. ábra
Egyensúly ék alakú érdes pályán

Ha a két ferde pályoldal tökéletesen sima lenne, akkor az A és B pontbeli támasztóerő csak az oldallapra merőleges lehetne és hatásvonaluk az M pontban metsződne. Az A - B rúd egyensúlyának biztosítása mellett csak olyan erővel lehetne terhelni, amelynek hatásvonala átmenne az M ponton.

A továbbiakban vizsgáljuk meg, miként áll fenn az egyensúly érdes pályán. Tudjuk, hogy nyugalom esetén a támasztóerők a súrlódási kúpon belül, illetve határesetben a súrlódási kúp palástján helyezkednek el. A pályaal oldalak eltérő súrlódási tényezője miatt az A pontban a ρ_0 félkúpszögű, a B pontban pedig a ρ_0^* félkúpszögű súrlódási kúp rajzolható meg. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a rúd A végpontja éppen lefelé, a B pedig felfelé mozdulna el. Ekkor az A pontbeli támasztóerő (az F_A), ill. a B pontbeli támasztóerő (az F_B) a megfelelő súrlódási kúpok baloldali palástján helyezkedik el (ellenkező esetben pedig a jobb oldali paláston). Látható, hogy egyensúly állhat fenn akkor, hogyha az F erő az M_1, M_4, M_2, M_3 pontokkal határolt sraffozott tartományon belül helyezkedik el. A tartóra nézve ez azt jelenti, hogyha az F erőt a C és D pontok között működtetjük, akkor lehetséges erő-egyensúly. A C és D pontokban az F erő értéke pontosan meghatározott.

Hengeres vezeték

Gyakran találkozunk olyan feladatokkal, amikor hengeres (d átmérőjű) vezetéknek kell elmozdítani egy játékkal illeszkedő perselyt (pl. fúróasztalok magasságának állításakor). Könnyen beláthatjuk, ha a persely hossza (h) túlságosan rövid, vagy túl nagy az F erő karja (k), akkor a persely megakad, ilyenkor önzáródásról beszélünk. Ebben az esetben bármikorára növeljük is az erőt, a persely és vele együtt a szerkezeti elem nem mozdul el. Célunk, hogy megállapítsuk az önzárás feltételét és ezért keressük az F erő karjának azt a k_0 határértékét, amelynél nagyobb karon működtetve az F erőt már nem képes a perselyt mozgatni (83. ábra). Az F erő hatására a persely az A és B pontokban a vezetékhez szorul. A



83. ábra
Hengeres vezeték

támaszkodási pontokban az F_{NA} , F_{NB} normális erők, valamint az F_{SA} , F_{SB} súrlódási erők ébrednek. Feltételezzük, hogy a súrlódási tényező mindkét pontban ugyanakkora (μ_0) és a súrlódási kúpokat is megrajzolhatjuk. Az elmozdulás *határhelyzetét* vizsgáljuk, amikor még egyensúly áll fenn, így felírhatjuk a síkbeli erők egyensúlyára vonatkozó egyenleteket (ese-tünkben egy nyomatéki és két vetületi egyenletet használunk).

$$I. \Sigma M_i^{(B)} = 0 = F(k_0 - \frac{d}{2}) + F_{SA}d - F_{NA}h,$$

mivel

$$F_{SA} = \mu_0 F_{NA},$$

$$F(k_0 - \frac{d}{2}) + \mu_0 F_{NA}d - F_{NA}h = 0,$$

innen

$$F_{NA} = \frac{F(k_0 - \frac{d}{2})}{h - \mu_0 d}.$$

$$II. \Sigma F_{ix} = 0 = -F_{NA} + F_{NB},$$

innen

$$F_{NA} = F_{NB} = F_N.$$

$$III. \Sigma F_{iy} = 0 = -F + F_{SA} + F_{SB},$$

innen

$$F = F_{SA} + F_{SB}.$$

Mivel

$$F_{NA} = F_{NB} = F_N \text{ és } F_S = \mu_0 F_N,$$

ezért

$$F_{SA} = F_{SB} = F_S = \mu_0 F_N.$$

Az F erő értéke tehát

$$F = 2\mu_0 F_N = 2\mu_0 \frac{F(k_0 - \frac{d}{2})}{h - \mu_0 d}.$$

Egyszerűsítés és átrendezés után

$$h - \mu_0 d = 2\mu_0 \left(k_0 - \frac{d}{2}\right),$$

$$h = 2\mu_0 k_0.$$

A kapott összefüggésből látható, hogy *amennyiben a*

$$h \leq 2\mu_0 k_0$$

összefüggés áll fenn, akkor a hengeres vezetőék önzáró, ellentétes esetben pedig nem. Geometriailag ez azt jelenti, hogy adott méretek esetén, amennyiben az F erő az M ponttól kezdődő vonalkázott területet metszi, akkor a persely egyensúlyban marad.

Az eredményekből következik az is, hogyha egy ilyen szerkezetre terhet akarunk függeszteni, úgy, hogy ne csússzon meg a szerkezet, akkor rövid perselyhosszt (h) kell választani.

5.3. A súrlódás elvén működő egyszerű gépek

Az egyszerű gépek azt a célt szolgálják, hogy az erők hatásukat minél kedvezőbb körülmények között fejthessék ki. Az egyszerű gépek közül csak a lejtővel, az ékkel és a csavarral foglalkozunk.

A lejtő

Vizsgálatainkat azzal az esettel kezdjük, amikor a lejtőre helyezett testre csak a súlyerő hat (80. ábra). Feladatunk, hogy meghatározzuk az egyensúly határhelyzetében a lejtő hajlásszögét. A test a lejtőről nem csúszik le, ha

$$G \sin \alpha \leq \mu_0 G \cos \alpha,$$

vagyis

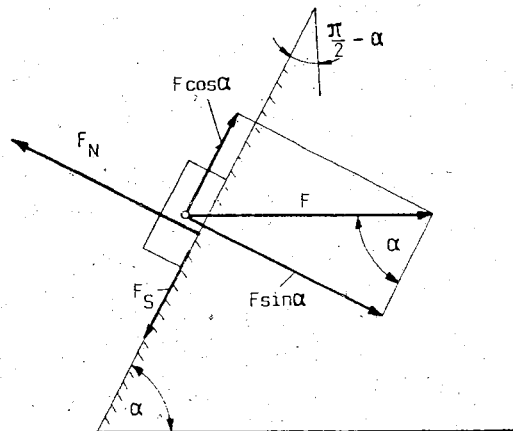
$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu_0 = \operatorname{tg} \rho_0$$

és

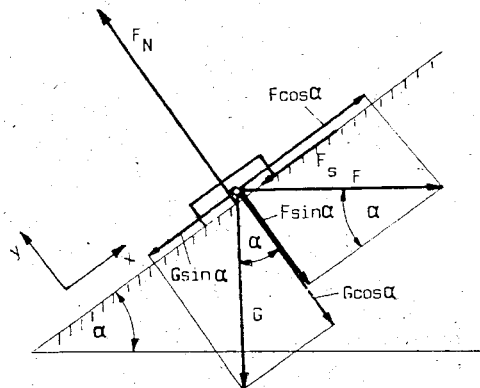
$$\rho \leq \rho_0.$$

Amennyiben a lejtő hajlásszöge túllépi az $\alpha = \rho_0$ értéket, akkor a test a lejtőn lecsúszik. Elmondhatjuk tehát, ha a lejtő hajlásszöge a nyugalmi súrlódás szögénél (a ρ_0 -nál) kisebb, akkor a lejtő a függőleges irányú erőkre önzáró, azaz a testre a súlyerőn kívül még tetszőleges nagyságú függőleges erő is hathat, de a test nem jön mozgásba.

A továbbiakban nézzük meg azt az esetet, amikor a lejtőre helyezett testre csak vízszintes irányú erő hat (84. ábra). Ez a helyzet lényegében véve megfelel egy $\pi/2 - \alpha$ hajlásszögű



84. ábra
A vízszintes irányú erőkre önzáró lejtő



85. ábra
Több erő hatásának kitett test

lejtőnek. Eszerint a test nem mozdul meg, ha $\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \rho_0$, vagyis amennyiben $\alpha \geq \frac{\pi}{2} - \rho_0$, akkor a lejtő a vízszintes irányú erőkre önzáró.

Továbbiakban vizsgáljunk meg egy olyan lejtőt, amelyik sem a vízszintes, sem a függőleges erőkre nem önzáró (85. ábra). A lejtőre helyezett testre a G és az F erő hat (az utóbbi vízszintes helyzetű). Amennyiben az F erő túl nagy, akkor a test felfelé mozdul, amennyiben kicsi, akkor lefelé. Feladatunk, hogy meghatározzuk, mekkora az F erő értéke a felfelé ill. a lefelé mozgítás határhelyzetében.

Felfelé mozgulás

Jelöljük a felfelé mozgulás határhelyzetében kifejtett erőt F_1 -gyel. Ekkor az F_S súrlódási erő lefelé mutat. Írjuk fel az egyensúlyi egyenletet a lejtő irányában:

$$\Sigma F_{ix} = 0 = -F_S - G \sin \alpha + F_1 \cos \alpha,$$

ahol

$$F_S = \mu_0 F_N = \mu_0 (G \cos \alpha + F_1 \sin \alpha).$$

Az egyensúlyi egyenletbe való behelyettesítés után

$$-\mu_0 (G \cos \alpha + F_1 \sin \alpha) - G \sin \alpha + F_1 \cos \alpha = 0,$$

mivel

$$\mu_0 = \frac{\sin \rho_0}{\cos \rho_0},$$

$$F_1 = G \frac{\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha} = G \frac{\sin(\alpha + \rho_0)}{\cos(\alpha + \rho_0)} = G \operatorname{tg}(\alpha + \rho_0).$$

Lefelé mozgulás

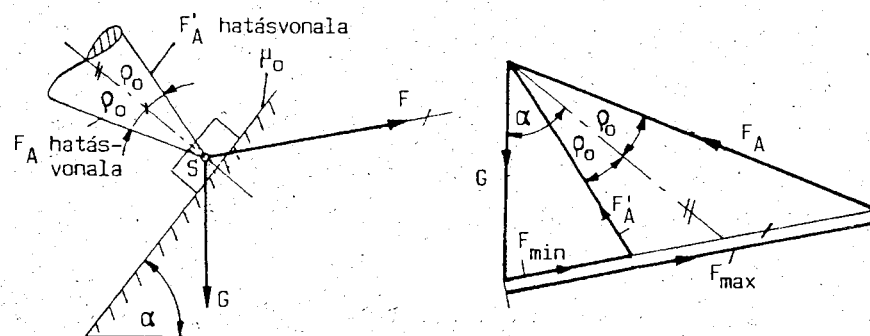
Lefelé mozgulás határhelyzetében jelöljük az erőt F_2 -vel. Az F_S súrlódási erő ekkor felfelé mutat. Az egyensúlyi egyenlet

$$\Sigma F_{ix} = 0 = F_S - G \sin \alpha + F_2 \cos \alpha,$$

Behelyettesítés és rendezés után

$$F_2 = G \frac{\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha} = G \frac{\sin(\alpha - \rho_0)}{\cos(\alpha - \rho_0)} = G \operatorname{tg}(\alpha - \rho_0).$$

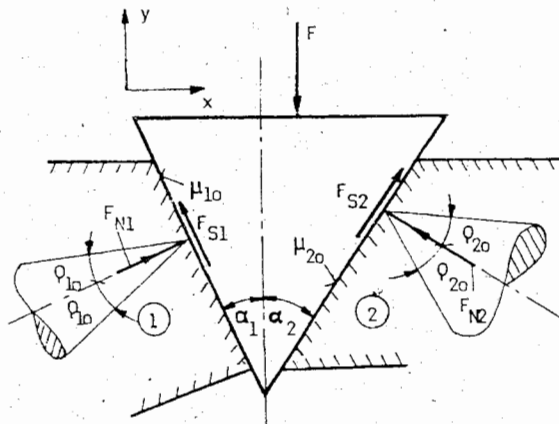
A következőkben vizsgáljunk egy olyan feladatot, amikor a testre nem vízszintes irányú F erő hat (86. ábra).



86. ábra
Szerkesztéses megoldás nem vízszintes erő hatásakor

A feladatot szerkesztéssel úgy tudjuk megoldani, hogy a test súlypontján átmenő normális körűl megrajzoljuk a súrlódási kúpot. Tudjuk, hogy a támasztóerő határhelyzetben az mozgulás irányával ellentétes kúpalkotón helyezkedik el. A test három erő (G , F , F_A , ill. F_A') hatására van egyensúlyban. A felfelé mozgulás határhelyzetében a G , F_{\max} , F_A vektorháromszög érvényes, lefelé mozgulásakor pedig a G , F_{\min} , F_A' erők alkotta vektorháromszög. Tehát a felfelé mozgulás határhelyzetében az F_{\max} erőt, lefelé mozgulásakor pedig az F_{\min} erőt kell kifejteni.

Az ék lényegében két lejtőből áll, emiatt az egyensúlyi egyenleteket is a lejtőre vonatkozó összefüggésekből származtatjuk. A levezetés során feltételezzük, hogy a metszősík az ék szimmetriásíkja, és az erők eredői is ebbe a síkba esnek (87. ábra). Jelöljük az ék két oldalán a súrlódási tényezőt μ_{10} -al, ill. μ_{20} -al. Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor az ék lefelé mozdul el. Ehhez a határhelyzethez tartozó erőt jelöljük F_1 -gyel.



87. ábra
Az ékre ható erők

Írjuk fel az x és y irányú vetületi egyenleteket!

$$\text{I. } \Sigma F_{ix} = 0 = F_{N1} \cos \alpha_1 - \mu_{10} F_{N1} \sin \alpha_1 - F_{N2} \cos \alpha_2 + \mu_{20} F_{N2} \sin \alpha_2,$$

$$\text{II. } \Sigma F_{iy} = 0 = F_{N1} \sin \alpha_1 + \mu_{10} F_{N1} \cos \alpha_1 + F_{N2} \sin \alpha_2 + \mu_{20} F_{N2} \cos \alpha_2 - F_1.$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy az ék szimmetrikus és a súrlódási tényező mindkét oldalon egyforma:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad F_{N1} = F_{N2} = F_N, \quad \rho_{10} = \rho_{20} = \rho_0.$$

Az ék behatolásának határhelyzetében szükséges erőt a II. egyenletről kapjuk:

$$F_1 = 2F_N (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) = 2F_N \frac{\sin(\alpha + \rho_0)}{\cos \rho_0}.$$

Ha az ékre ható erő az F_1 értéknél nagyobb, akkor az ék az anyagba behatol. A kapott összefüggésből látható, hogy minél kisebb az α , ill. a ρ_0 , annál kisebb erőt kell kifejteni az ék beveréséhez. Gyakorlati szempontból ez azt jelenti, hogy élesebb éket kell használni kis súrlódási tényező mellett. A súrlódási tényezőt pl. kenéssel tudjuk csökkenteni.

Előfordulhat olyan eset is, hogy a beveréshez szükséges erő nem elegendő és az ék kitolódik. Jelöljük ezt az erőt az egyensúly határhelyzetében F_2 -vel. Ennek az erőnek az értékét abból a megfontolásból kiindulva tudjuk levezetni, hogy a súrlódási erő értelme megváltozik. A II. egyensúlyi egyenlet értelemszerű felhasználásával kapjuk, hogy

$$F_2 = 2F_N \frac{\sin(\alpha - \rho_0)}{\cos \rho_0}.$$

Az ék akkor önzáró, hogyha még abban az esetben sem tolódik ki, amikor $F_2=0$, vagyis

$$(\alpha - \rho_0) \leq 0,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\alpha \leq \rho_0.$$

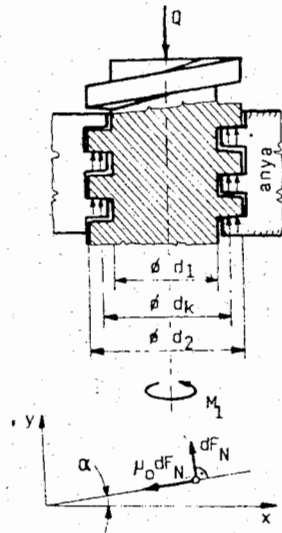
A továbbiakban a lejtőnél megismert alapfogalmak segítségével levezetjük a csavarorsóval történő teheremelés összefüggéseit.

Csavar

A csavart egy egyenes körhengerre felcsavart lejtőként modellezhetjük. Amennyiben a csavarfelszínt úgy állítjuk elő, hogy egy egyenest csavarvonalon úgy mozgatunk, hogy az egyenes merőleges a csavarorsó tengelyére, akkor laposmenetű csavart kapunk, ha viszont az egyenes a tengellyel szöget zár be, akkor élesmenetű csavart nyerünk. Először a 88. ábrán látható laposmenetű csavarral foglalkozunk abban az esetben, amikor a csavarorsó és vele együtt a Q teher emelkedik.

A kitértett csavarmenetre ható elemi erőt dF_N -nel jelöljük. Az orsó felfelé mozgulásának határhelyzetében a súrlódási erő értéke $\mu_0 dF_N$ és a lejtőn lefelé mutat. Az egyszerűség kedvéért úgy tekintjük, hogy ezek az erők az $r_k = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ közepes sugárral leírt csavarvonalon hatnak. A felfelé mozdítás határhelyzetében szükséges nyomatékot M_1 -gyel jelöljük és felírjuk a függőleges irányú erőkre, valamint a nyomatékokra vonatkozó egyensúlyi egyenletet:

$$\Sigma F_{iy} = 0 = -Q + \int \cos \alpha dF_N - \int \mu_0 \sin \alpha dF_N = 0.$$



88. ábra
A laposmenetű csavarra ható erők

Mivel α , μ_0 állandók, és $\int dF_N = F_N$, ezért

$$Q = F_N (\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha) = F_N \frac{\cos(\alpha + \rho_0)}{\cos \rho_0}$$

Az orsó tengelyére vonatkozó nyomatékokat csak az x irányú erők okozzák, így

$$M_1 - r_k \sin \alpha \int dF_N - \mu_0 r_k \cos \alpha \int dF_N = 0,$$

$$M_1 = F_N r_k (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) = F_N r_k \frac{\sin(\alpha + \rho_0)}{\cos \rho_0}$$

A Q erőre vonatkozó összefüggés felhasználásával megkapjuk az

$$M_1 = Q r_k \operatorname{tg}(\alpha + \rho_0)$$

egyenletet, melynek segítségével ki tudjuk számítani a Q teher felfelé mozdításának határhelyzetében a kifejtendő nyomaték értékét. Ha $\alpha + \rho_0 = \frac{\pi}{2}$, akkor az M_1 értéke végtelen, vagyis az $\alpha = \frac{\pi}{2} - \rho_0$ szögnél nagyobb emelkedésű csavarral nem lehet terhet emelni.

A Q teher süllyesztésekor a súrlódási erő értelme megváltozik és a fentiekhez hasonló módon levezethető, hogy a Q teher süllyesztéséhez

$$M_2 = Q r_k \operatorname{tg}(\alpha - \rho_0)$$

nagyágú nyomatékot kell kifejteni. Ha $\alpha - \rho_0 = 0$, akkor $M_2 = 0$, és ez azt jelenti, hogy az $\alpha = \rho_0$ emelkedési szögű csavar a terhet bármilyen helyzetben megtartja. Ha $\alpha < \rho_0$, akkor a teher süllyesztéséhez nyomatékot kell kifejteni.

Az élesmenetű csavart körkörös ékalakú horonyban mozgó ékként modellezhetjük (89. ábra), ahol a horony félszöge $\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$.

Ily módon a súrlódási tényező

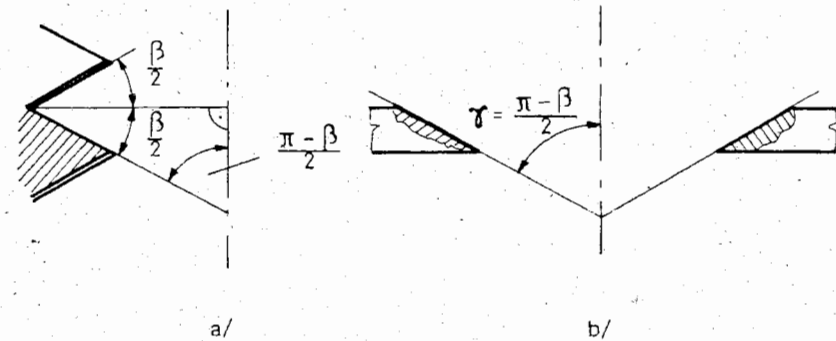
$$\mu' = \frac{\mu_0}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\mu_0}{\cos \frac{\beta}{2}} \text{ lesz.}$$

Látható, hogy a súrlódási tényező megnő, de ezzel a módosítással a laposmenetű csavarra kapott összefüggéseket alkalmazhatjuk, vagyis

$$M_{1,2} = Q r_k \operatorname{tg}(\alpha \pm \rho_0),$$

ahol ρ_0 a módosított súrlódási félkúpszög.

Élesmenetű csavart tehát ott használunk, ahol a csavar önzáródását segítjük elő (pl. kötésekénél).

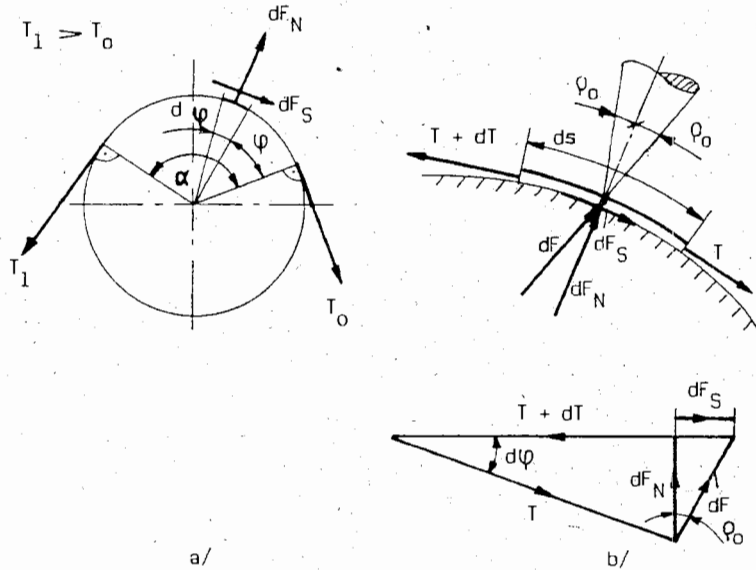


89. ábra
Élesmenetű csavar

5.4. A kötelsúrlódás

5.4.1. A kötelsúrlódás differenciálegyenlete

A helybenálló hengerfelületen egy tökéletesen hajlékony, nyújthatatlan kötelet fektetünk át, melynek két végére T_1 ill. T_0 nagyságú erő hat (90. ábra).



90. ábra
A kötelsúrlódás vizsgálata

Teljesen sima hengerfelület esetén a kötélnél csak akkor lehet egyensúlyban, ha a kötélerő minden pontban egyenlő $T_1 = T_0$.

Érdes felület esetén viszont a felszín és a kötélnél közötti súrlódás ébred, ami az érintkezési felület mentén megoszlik és emiatt a kötélerő is változik.

A 90. ábra egy α középponti szöghöz tartozó kötélelemet ábrázol a ráható erőkkel együtt. A kötélelem végén a $T+dT$, illetve a T kötélerő hat. A kötélnél és az érdes henger között az érintőirányú dF_S súrlódási erő, valamint a dF_N normális irányú erő ébred. Az utóbbi két erő (dF_S , dF_N) eredője a dF támasztóerő. Az erőhatások ismeretében megrajzolható a kötélelem egyensúlyát kifejező vektorábra: az egyensúlyt az T , dF és $T+dT$ erők közül álló vektorháromszög fejezi ki. Az ábráról látható a dF erő összetevőkre bontása is. Mivel $d\varphi$ kicsi, ezért

$$\sin d\varphi \approx d\varphi \text{ és } \cos d\varphi \approx 1,$$

másrészt

$$dF_S = \operatorname{tg} \rho_0 dF_N = \mu_0 dF_N,$$

$$dF_N = T \sin d\varphi = T d\varphi.$$

Írjuk fel a vektorháromszög alapján az erők vízszintes irányú vetületének egyensúlyát:

$$-(T + dT) - T \cos d\varphi + dF_S = 0,$$

innen

$$dT = dF_S = \mu_0 dF_N = \mu_0 T d\varphi.$$

A fenti egyenletet — a kötelsúrlódás differenciaegyenletét — a következő alakban írhatjuk

$$\frac{dT}{T} = \mu_0 d\varphi,$$

amit a megfelelő határok között integrálva

$$\int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = \mu_0 \int_0^{\alpha} d\varphi,$$

vagyis

$$\ln \frac{T_1}{T_0} = \mu_0 \alpha,$$

innen

$$T_1 = T_0 e^{\mu_0 \alpha}.$$

Az összefüggés a kötélnél két végén ható erők közti kapcsolatot fejezi ki, ahol e — a természetes logaritmus alapszáma,

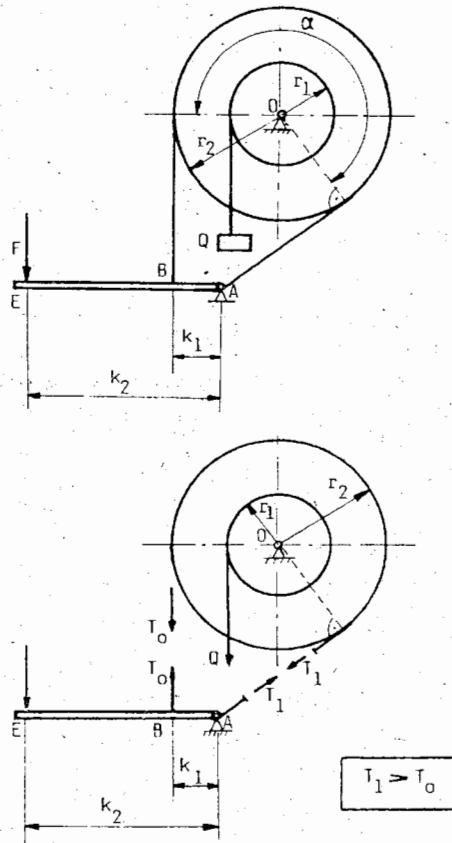
α — a hengerfelszín és a kötélnél közti átfogási szög, radiánban kifejezve.

A kötelsúrlódás tényét használják ki pl. hajók kikötésénél, amikor a kötelet kikötői bakok köré csévélik és így a nagy hajótestet a matrózok megtudják tartani.

A következőkben megvizsgáljuk a kötelsúrlódás egyik fontos gyakorlati alkalmazását, a szalagféket.

5.4.2. A szalagfék

A szalagféket emelőberendezésekben használják a felemelt teher egyensúlyban tartására vagy a süllyesztési sebesség szabályozására. A 91. ábrán egy szalagfék-típus látható.



91. ábra
Szalagfék

A Q terhet tartó kótel az r_1 sugarú kóteldobra csévélődik fel. Ezzel a dobbal van összekötve az r_2 sugarú féktárcsa, melynek kerületén fékezéskor az α átfogási szög mentén fejt ki hatását a súrlódási erő. Emiatt a fékszalag két ágában ébredő erő különböző ($T_1 > T_0$). Számításaink során az acélból készült fékszalagot tökéletesen hajlékonynak tetelezzük fel és a csuklóban ébredő súrlódásokat elhanyagoljuk. A továbbiakban meghatározzuk, hogy mekkora az a legkisebb F fékező erő, ami a Q terhet egyensúlyban tudja tartani.

A dob tengelyére felírjuk a nyomatéki egyensúlyt:

$$Q r_1 + T_0 r_2 - T_1 r_2 = 0,$$

innen

$$T_1 - T_0 = Q \frac{r_1}{r_2}.$$

A két kótelágban ébredő erő közti

$$T_1 = T_0 e^{\mu_0 \alpha}$$

összefüggés felhasználásával írhatjuk, hogy

$$T_0 e^{\mu_0 \alpha} - T_0 = T_0 (e^{\mu_0 \alpha} - 1) = Q \frac{r_1}{r_2}.$$

A fékezőkar egyensúlyát az A ponti tengelyre felírt

$$F k_2 - T_0 k_1 = 0$$

egyenlet fejezi ki. A T_0 értékének helyettesítése és az egyenlet rendezése után

$$F = T_0 \frac{k_1}{k_2} = Q \frac{r_1 k_1}{r_2 k_2} \frac{1}{e^{\mu_0 \alpha} - 1}$$

adódik, ami a geometriai méretek és a súrlódási tényező függvényében megadja a Q terhet fékezéséhez szükséges erőt az elmozdulás határhelyzetében.

5.5. A gördülési ellenállás

A gördülési probléma teljes részleteiben még napjainkban sincs tisztázva. Tárgyalásaink során olyan egyszerű modellre támaszkodunk, ami a megértéshez elegendő.

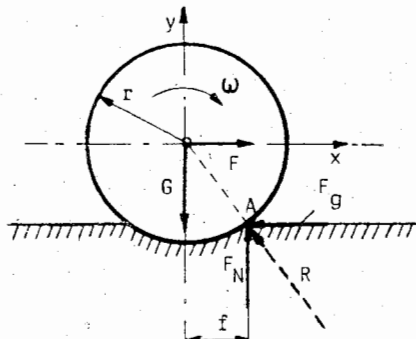
Ha a gördülő test és a támasztósík tökéletesen kemény lenne, akkor az érintkezés egy alkotó mentén történne. Ekkor a test a legkisebb, támasztósík irányába eső erő hatására elfordulna. A valóságban mindkét felület kisebb-nagyobb mértékben alakváltozik, benyomódik és gördülő ellenállás lép fel (92. ábra).

Az ábráról láthatjuk, hogy a támasztóerő a benyomódás hossza mentén bárhová eshet, az x irányú erő hatására az elfordulás határhelyzetében pedig az A pontba kerül. Az A pontban a támasztóerőt összetevőire bontjuk. A test addig marad nyugalomban (nem fordul el), amíg

$$F r \leq F_N f,$$

vagyis

$$F \leq \frac{f}{r} F_N = \frac{f}{r} G.$$



92. ábra

A gördülő ellenállás értelmezése

A két anyag keménységére jellemző a benyomódás félszélessége (f), amit a *gördülő ellenállás karjának* nevezünk, nyomatéka az $M_g = F_N f$ pedig a *gördülő ellenállás nyomatéka*.

Számításaink során a benyomódás kis értékét az r sugár mellett elhanyagoljuk. Látható, hogy a gördítéshez szükséges erőt úgy tudjuk csökkenteni, ha a benyomódás hosszát minél kisebbre szorítjuk (pl. az anyagok keménységének növelésével), vagy növeljük a gördülő test sugarát. Az F erőt fokozatosan növelve a test nyugalmi helyzetéből elfordul (gördül), ha $f/r < \mu_0$.

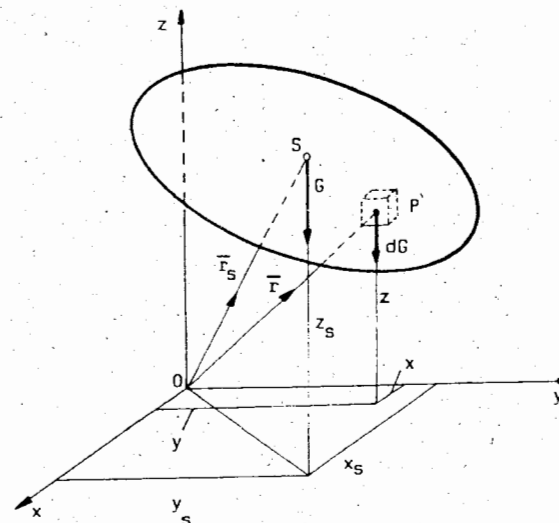
A gördülés karjának kicsisége miatt még további feltételezésekkel élhetünk és ennek alapján a feladatok megoldását tovább egyszerűsíthetjük.

6. A súlypont

6.1. A súlypont fogalma

A merev test minden egyes elemére a Föld vonzásából származó erő hat. Ez a párhuzamos, azonos értelmű erőrendszer helyettesíthető egyetlen erővel, ami egy ponton, a súlyponton megy keresztül (93. ábra). A párhuzamos erőrendszer középpontját *súlypontnak* nevezzük.

A súlyponton átmenő egyeneseket *súlyvonalaknak* nevezzük. A továbbiakban mértani alakzatok (testek, felületek, vonalak) súlypontjával foglalkozunk. Feltételezzük, hogy a merev alakzat egész terjedelmében az anyageloszlás egyenletes.



93. ábra

Merev testre ható erőrendszer

6.2. A súlyponti koordináták számítása

A merev test súlypontjának meghatározása céljából a vizsgált test P pontjának környezetéből vegyünk ki egy elemi kiskockát és ennek sűrűsége legyen ρ . Az elemi dV térfogatú rész tömege $dm = \rho dV$ és az elemi tömegű részre ható erő nagysága $dG = g dm = g(\rho dV)$. A függőleges irányú, párhuzamos, megoszló erőrendszer *intenzitásának nagysága*:

$$f = \frac{dG}{dV} = \rho g,$$

ahol az intenzitás a hely függvénye is lehet. Mértékegysége pl. N/m^3 . (A g a nehézségi gyorsulás.)

A súlypont meghatározása céljából a testet elemi részecskékre bontjuk és az egyes részecskékre ható erőket dG -vel jelöljük (pl. az x, y, z koordinátájú pontban), melyek párhuzamosak a z tengellyel. E párhuzamos erőrendszer eredőjét a 4.4 fejezetben megismert módon határozzuk meg.

Az erőrendszer eredője a

$$G = \int f dV = \int dG$$

összefüggés alapján számítható. A súlyponti koordinátáknak a koordináta-rendszer 0 pontjából mért távolságát pedig a megfelelő tengelyre felírt nyomatéki egyenletekből tudjuk meghatározni:

$$x_s \int dG = \int x dG, \text{ inen } x_s = \frac{\int x dG}{\int dG},$$

$$y_s \int dG = \int y dG, \text{ inen } y_s = \frac{\int y dG}{\int dG},$$

$$z_s \int dG = \int z dG, \text{ inen } z_s = \frac{\int z dG}{\int dG}.$$

Amennyiben felhasználjuk a $dG = g dm$ összefüggést, akkor az

$$x_s = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad y_s = \frac{\int y dm}{\int dm}, \quad z_s = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

értéket kapjuk. Ha $\rho = \text{állandó}$, akkor $dm = \rho dV$, innen

$$x_s = \frac{\int x dV}{\int dV}, \quad y_s = \frac{\int y dV}{\int dV}, \quad z_s = \frac{\int z dV}{\int dV}.$$

A továbbiakban tekintsük a *síkidomot* igen kicsi, de állandó vastagságú homogén lemeznek, melynek vastagsága v . Olyan síkidomot vizsgálunk, amelyik az x - y síkban fekszik. A $dV = v dA$ összefüggés felhasználásával:

$$x_s = \frac{\int x dA}{\int dA}, \quad y_s = \frac{\int y dA}{\int dA}.$$

A számlálóban szereplő mennyiségek az

$$\int x dA \text{ és } \int y dA$$

a felületelem statikai nyomatéka az y ill. az x tengelyre. E mennyiségeket értelemszerűen S_y -nal ill. S_x -szel jelöljük és a szilárdságtani számításokban játszanak szerepet. (Sajátosságait a 6.4.1 fejezetben részletesebben elemezzük.)

A fenti összefüggések alapján a homogén vonaldarabra kapjuk, hogy

$$x_s = \frac{\int x dl}{\int dl}, \quad y_s = \frac{\int y dl}{\int dl}, \quad z_s = \frac{\int z dl}{\int dl},$$

ahol $\int dl = l$ a vonalszakasz hossza. Ezután részletesebben megvizsgáljuk, hogy egyes esetekben miként számíthatók a súlyponti koordináták.

6.3. Vonalak súlypontja

A vonalakat a továbbiakban igen vékony szálaknak tekinthetjük. Az egyenes vonalszakasz középpontjára nézve szimmetrikus, tehát súlypontja a vonalszakasz felezéspontjával esik egybe. Törtvonalak súlypontját úgy tudjuk legegyszerűbben meghatározni, hogy egyes darabokra osztjuk (94. ábra).

Mivel külön-külön minden egyes szakasz súlypontját ismerjük, ezért az ábra jelöléseivel írható, hogy

$$x_s = \frac{x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i},$$

$$y_s = \frac{y_1 l_1 + y_2 l_2 + y_3 l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}.$$

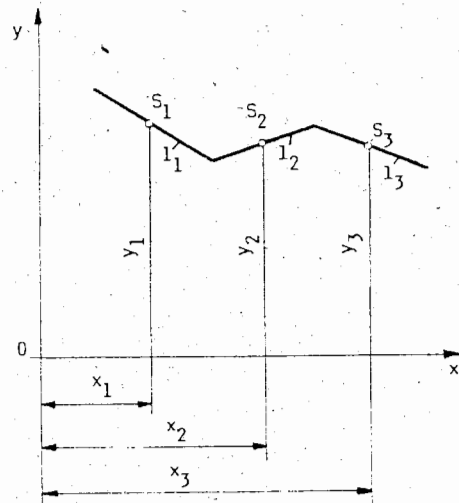
Ha térbeli vonallal állunk szemben, akkor hasonló típusú összefüggés áll fenn a z_s súlyponti koordinátára is.

Vannak olyan vonalak, melyek súlypontját integrálással közvetlenül meg tudjuk határozni. Ilyen a 95. ábrán látható *körív*.

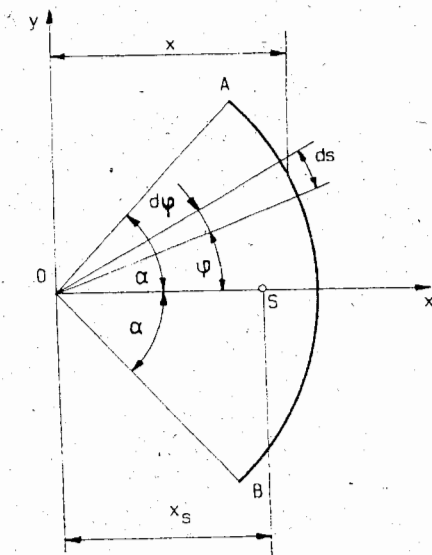
Az r sugárral és a 2α központi szöggel adott körívnek van egy szimmetriatengelye, amelyen a súlypont is elhelyezkedik. Feladatunk az x_s távolság meghatározása.

A körív elemi hossza: $ds = r d\varphi$,

az x koordináták értéke: $x = r \cos \varphi$.



94. ábra
Tört vonal súlypontja



95. ábra
A körív súlypontja

A fenti összefüggéseket a súlyponti koordináta számítására alkalmas

$$x_s = \frac{\int_0^l x ds}{\int_0^l ds}$$

összefüggésbe kell behelyettesíteni:

$$x_s = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} r \cos \varphi r d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} r d\varphi} = \frac{r^2 [\sin \alpha - (-\sin \alpha)]}{r [\alpha - (-\alpha)]}$$

Rendezés után

$$x_s = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Félkörív esetén

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ és } x_s = \frac{2r}{\pi}$$

6.4. Síkidomok súlypontja

Az x-y síkbeli idom súlyponti koordinátáit a 6.2 fejezetben levezetett

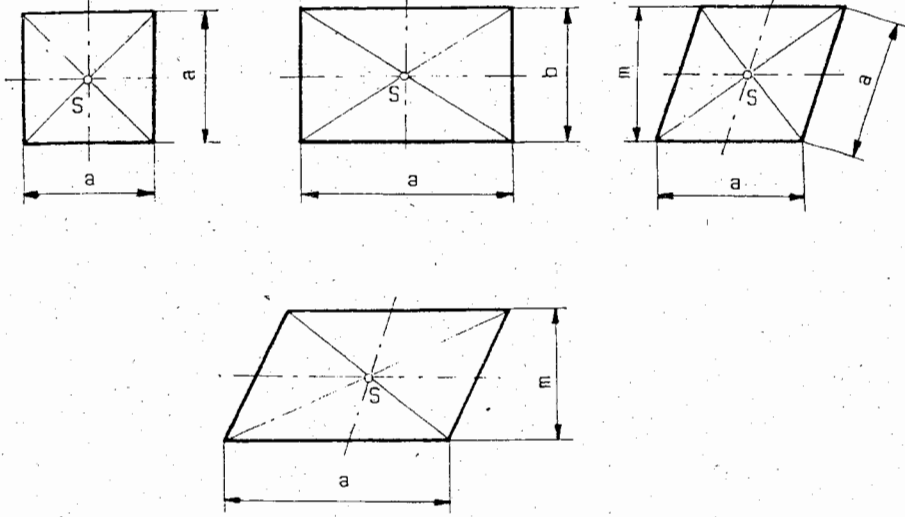
$$x_s = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{S_y}{A}, \quad y_s = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{S_x}{A}, \quad z_s = 0.$$

képletekkel határozhatjuk meg ($\int dA = A$).

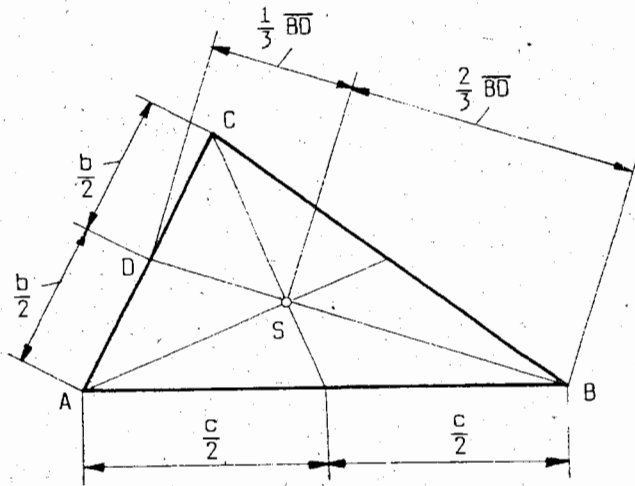
Szabályos síkidomok súlypontját a fenti képletek használata nélkül egyszerűen meg tudjuk keresni. A 96. ábrán látható alakzatot (négyzet, téglalap, rombusz, paralelogramma) a középpontjukra nézve szimmetrikusak, tehát súlypontjuk egybeesik a középpontjukkal.

A háromszög súlypontja, mint ismeretes, az oldalfelezési pontokat a szemben fekvő csúcspontokkal összekötő egyenesek, vagyis a súlyvonalak metszéspontjában van (97. ábra). (1/3 távolságra az oldaltól, 2/3 távolságra a csúcstól).

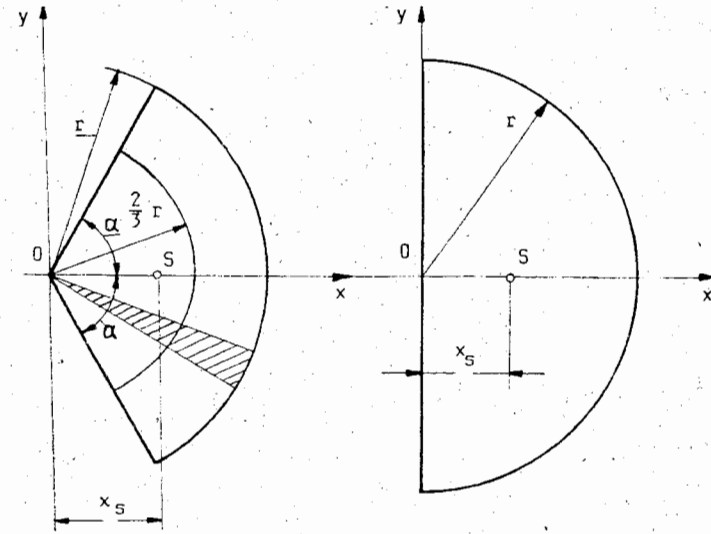
A *körcikk* súlypontja a szimmetriatengelyén (esetünkben az x tengelyen) helyezkedik el (98. ábra). Ha keskeny háromszögekre bontjuk, látható, hogy az egyes háromszögek súly-



96. ábra
Központosan szimmetrikus négyszögek



97. ábra
A háromszög súlypontja



98. ábra
Körcikk és félkör-lap súlypontja

pontjai $2/3 r$ sugarú köríven helyezkednek el. Ennek a körívnek a súlypontja lesz a körcikk súlypontja is (a 6.3 fejezetben levezetett összefüggés alapján):

$$x_s = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

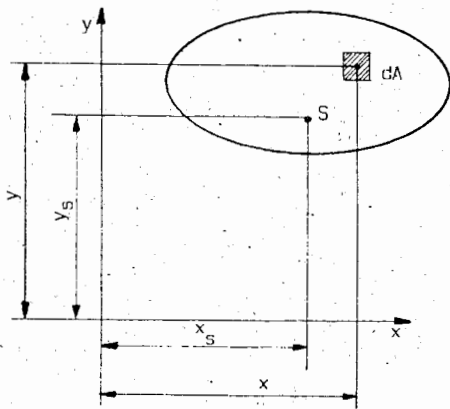
Félkör-lap esetén:

$$x_s = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{4}{3\pi} r$$

A súlyponti koordinátákat a statikai nyomaték ismeretében egyszerűen számíthatjuk.

6.4.1. A síkidomok súlypontjának meghatározása a statikai nyomaték segítségével

A síkidomok súlypontjánál a számlálójában szereplő mennyiségeket a síkidomok *statikai* vagy *elsőrendű nyomatékának* nevezzük és S_x -szel ill. S_y -nal jelöltük. Értelmezését a 99. ábra mutatja.



99. ábra
A síkidom statikai nyomatéka

$$S_x = \int_{(A)} y \, dA, \quad S_y = \int_{(A)} x \, dA,$$

ahol S_x — a síkidom x tengelyre vonatkozó,

S_y — pedig az y tengelyre vonatkozó statikai nyomatéka.

A statikai nyomaték mértékegysége pl. m^3 . A síkidomok súlypontjának koordinátái a statikai nyomatékok felhasználásával egyszerűbb alakban is írhatók:

$$x_s = \frac{S_y}{A}, \quad y_s = \frac{S_x}{A}.$$

A síkidomok gyakran feloszthatók olyan részdíomokra (háromszögekre, négyzetekre, églalpokra stb.), amelyek súlypontja ismert. Ilyenkor az integrálás helyett a statikai nyomatékok egyszerű összegzéssel is meg tudjuk határozni.

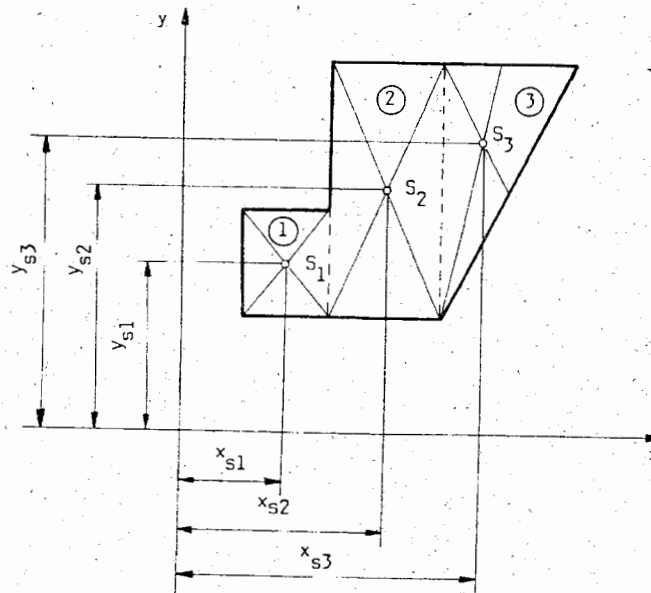
A 100. ábra alapján a részterületek súlypontjának felhasználásával kapjuk, hogy

$$S_x = \sum_{i=1}^3 y_{s_i} A_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^3 x_{s_i} A_i;$$

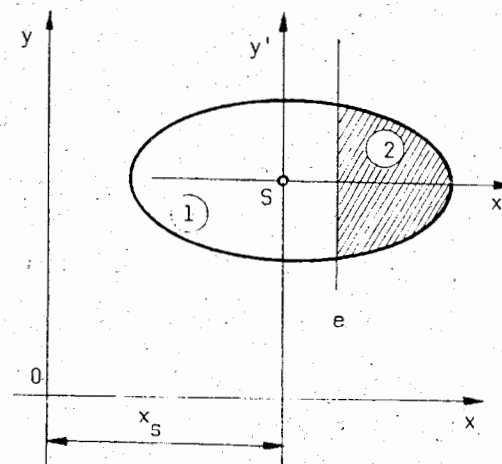
innen a súlypont koordinátái:

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{A}, \quad y_s = \frac{\sum y_i A_i}{A}.$$

Tételezzük fel, hogy valamely testnek ismerjük a súlypontját (101. ábra). Írjuk fel a statikai nyomatékokat egy súlyvonalra, például a súlyponton átmenő y' tengelyre:



100. ábra
Síkidomokra bontható alakzat súlypontja



101. ábra
A statikai nyomaték sajátosságainak értelmezése

$$x_s' = \frac{S_y'}{A} = 0,$$

mivel $A \neq \infty$ ezért $S_y' = 0$, vagyis bármely síkidom súlyponti tengelyére számított statikai nyomatéka zérus.

Osszuk fel a vizsgált síkidomot két részre az új tengellyel párhuzamos „e” egyenessel és írjuk fel a két rész statikai nyomatékát az y' súlyponti tengelyre:

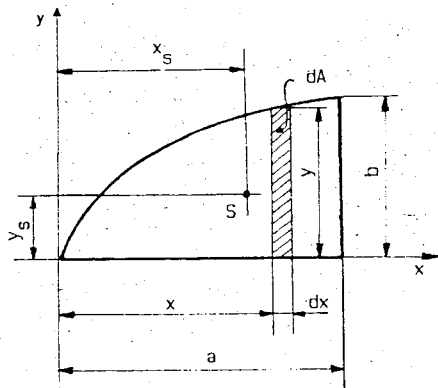
$$S_y' = S_1' + S_2' = Ax_s' = 0,$$

innen

$$S_1' = -S_2'.$$

Az eredményből látható, hogy a két területrésznek a metsző egyenessel párhuzamos súlyponti tengelyre (y') számított statikai nyomatéka egyenlő nagyságú, de ellenkező előjelű.

A következőkben meghatározzuk a 102. ábrán látható parabolaív alatti területet, továbbá a súlypont koordinátáit.



102. ábra
A parabolaív alatti terület súlypontja

A parabola kanonikus egyenlete:

$$y^2 = 2px.$$

Az $x=a$, ill. $y=b$ helyettesítéssel

$$p = \frac{y^2}{2x} = \frac{b^2}{2a},$$

ill. az átalakított parabola egyenlet:

$$y = \sqrt{2px} = b \sqrt{\frac{x}{a}}.$$

A parabola alatti terület

$$A = \int_{(A)} dA = \int_0^a y dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3} ab.$$

Az S_x statikai nyomaték számításához a területelem:

$$dA = (a - x) dy.$$

Az x tengelyre vonatkozó statikai nyomaték:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_{(A)} y dA = \int_0^b y (a - x) dy = \int_0^b (ay - xy) dy = \int_0^b \left(ay - \frac{ay^3}{b^2} \right) dy = \\ &= \left[a \frac{y^2}{2} - \frac{a}{b^2} \frac{y^4}{4} \right]_0^b = \frac{ab^2}{2} - \frac{ab^4}{b^2 \cdot 4} = \frac{ab^2}{4}. \end{aligned}$$

Az y tengelyre vonatkozó statikai nyomaték:

$$S_y = \int_{(A)} x dA = \int_0^a xy dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{5} ba^2.$$

A súlyponti koordináták:

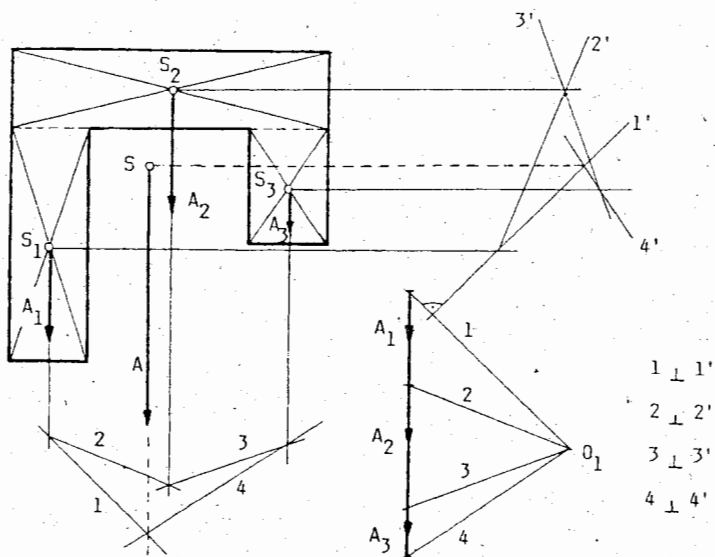
$$x_s = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{2}{5} ba^2}{\frac{2}{3} ab} = \frac{3}{5} a,$$

$$y_s = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{1}{4} ab^2}{\frac{2}{3} ab} = \frac{3}{8} b.$$

Síkidomok súlypontját egyszerűbb esetben kötélsokszög szerkesztéssel is meg tudjuk határozni, amit a következő fejezetben tárgyalunk.

6.4.2. Síkidomok súlypontjának szerkesztése

A síkidomok súlypontjának szerkesztésekor az alakzatot részekre bontjuk úgy, hogy az egyes részek területét és súlypontját egyszerű legyen meghatározni (103. ábra).



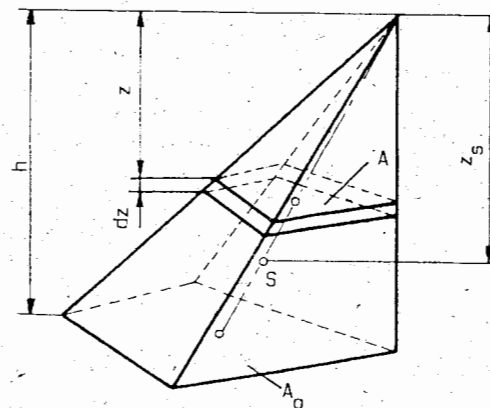
103. ábra
Síkidomok súlypontjának szerkesztése

Az ábrán látható síkidomot három téglalpra bontottuk fel és meghatároztuk az egyes idomok területét (A_1, A_2, A_3), valamint a súlypontok helyét (S_1, S_2, S_3). Az egyes részek súlypontjában elhelyezzük a területekkel arányos vektorokat, majd meghatározzuk a párhuzamos vektorok eredőjét (A) szerkesztéssel. Az eredő keresztülmegy a test súlypontján és hatásvonala a síkidom egyik súlyvonala lesz. A területekkel (A_1, A_2, A_3) arányos vektorokat bármilyen helyzetben felvihetjük a megfelelő súlypontba, csak arra kell ügyelni, hogy egymással párhuzamosak legyenek. Így újabb párhuzamos vektorokat kapunk, eredőjük hatásvonala szintén keresztülmegy a súlyponton. A két súlyvonal tehát már meghatározza a súlypont helyét. A második súlyvonal szerkesztéséhez azonban nem kell újabb vektorsokszöget szerkesztetni, hanem elegendő a megfelelő sugarakra merőlegest állítani és metszeni a 90° -kal elforgatott hatásvonalakat.

Síkidomok súlypontját kísérlettel egyszerűen meg tudjuk keresni. Két különböző pontban fel kell függeszteni az alakzatot és a felfüggesztési pontokon át húzott függőleges egyenesek metszéspontja megadja a súlypontot.

6.5. Testek súlypontja

Testek súlypontját a 6.1 pontban levezetett összefüggések adják meg. Szabályos testek (kocka, téglatest, hasáb, gömb stb.) súlypontját eddigi tanulmányainkból ismerjük. A következőkben a 104. ábrán látható gúla térfogatát és ennek ismeretében a súlypontját keressük meg.



104. ábra
Gúla súlypontja

A gúlát az alaplappal párhuzamos szeletekre bontjuk. Az egyes szeletek metszési lapjai az alaphoz hasonló síkidomok és minden egyes metszési lap súlypontja az alap súlypontját a gúla csúcsával összekötő egyenesen van. Jelöljük az alaplappal területét A_0 -l, és az alappal párhuzamos egyik metszősíkját pedig A -val. E területek úgy aránylanak egymáshoz, mint a csúcstól mért távolságuk négyzete

$$\frac{A}{A_0} = \frac{z^2}{h^2},$$

innen

$$A = A_0 \frac{z^2}{h^2}.$$

Az egyes szeletek térfogata

$$dV = A dz = A_0 \frac{z^2}{h^2} dz,$$

a gúla térfogata pedig

$$V = \int_{(V)} dV = \frac{A_0}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{A_0}{h^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{A_0 h}{3}$$

A súlypontnak a csúcstól az alaplapra merőleges egyenesen mért távolsága

$$z_s = \frac{\int z dV}{\int dV} = \frac{\int_0^h A_0 \frac{z^2}{h^2} dz}{\frac{A_0 h}{3}} = \frac{3}{h^3} \int_0^h z^3 dz = \frac{3}{h^3} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^h = \frac{3}{4} h,$$

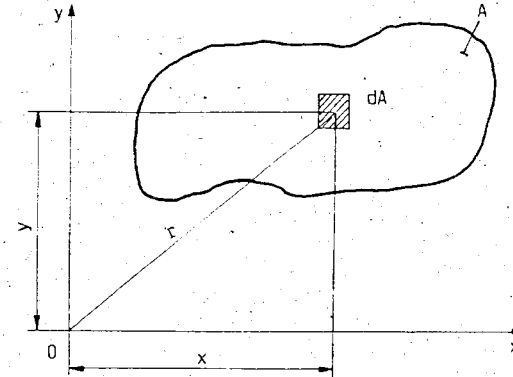
tehát a gúla (és a kúp) súlypontja az alaplap súlypontját a csúcstól összekötő egyenesen van, az alaptól negyedtávolságra. Összetett testek súlypontját olyan egyszerűbb testekre bontással határozzuk meg, amelyek súlypontját ismerjük.

A továbbiakban rátérünk a szilárdságtanban szükséges másodrendű nyomatékok tárgyalására.

7. Síkidomok másodrendű nyomatékai

7.1. A másodrendű nyomatékok értelmezése

A síkidomok elsőrendű nyomatékain kívül a rugalmas rendszerek vizsgálatában fontos szerepe van a síkidomok másodrendű nyomatékainak is. A másodrendű nyomaték tisztán geometriai mennyiség, csupán a keresztmetszet alakjától és méreteitől függ.



105. ábra

A másodrendű nyomatékok származtatása

A másodrendű nyomaték jele: I ; mértékegysége: m^4 , cm^4 , mm^4 . A síkidomok másodrendű (inercia) nyomatékának több fajtáját különböztetjük meg, amelyeket a következőkben részletesen vizsgálunk.

Tengelyre számított (aequatoriális) másodrendű nyomaték

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA, \quad I_y = \int_{(A)} x^2 dA.$$

Az összefüggésben a területelemeket meg kell szorozni a megfelelő tengelytől való távolság négyzetével és integrálni kell az egész tartományon. Előjele mindig pozitív.

Tengelypárra számított (centrifugális vagy devivációs) másodrendű nyomaték

Értékét a következő összefüggéssel számíthatjuk:

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy dA.$$

Értelmezésünk alapján a két tengely egymásra mindig merőleges. Mivel x és y előjeles mennyiségek, ezért a tengelypárra számított másodrendű nyomaték lehet pozitív, negatív és zérus értékű. Ha a két tengely közül legalább az egyik a keresztmetszet szimmetriatengelye, akkor a centrifugális másodrendű nyomaték mindig zérus.

A pontra számított vagy poláris másodrendű nyomaték

Az ábra alapján beláthatjuk, hogy tetszőleges síkidomra érvényes a következő összefüggés:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

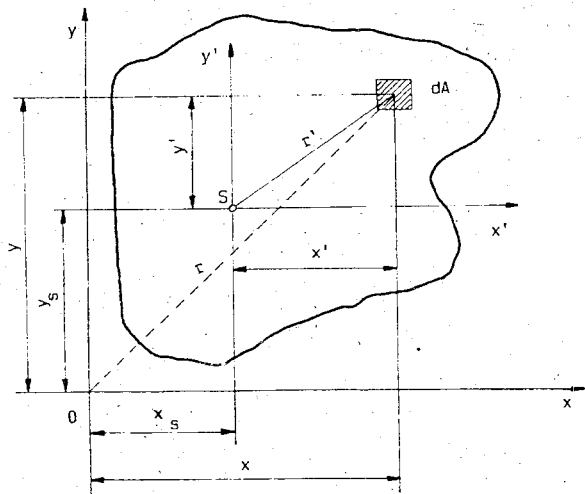
Emiatt a poláris másodrendű nyomatéokra felírhatjuk, hogy

$$I_p = \int_{(A)} r^2 dA = \int_{(A)} (x^2 + y^2) dA = \int_{(A)} x^2 dA + \int_{(A)} y^2 dA = I_x + I_y.$$

Látható, hogy a pontra (esetünkben az 0 pontra) számított másodrendű nyomaték egyenlő a ponton átmenő két egymásra merőleges tengelyre számított nyomaték összegével.

7.2. Összefüggés párhuzamos tengelyekre számított másodrendű nyomatékok között. A Steiner-tétel.

Vizsgálataink során felhasználjuk a 106. ábrán látható két derékszögű koordinátarendszert (az x , y -t, és az x' , y' -t).



106. ábra
A Steiner-tétel értelmezése

Az ábráról leolvasható, hogy

$$x = x' + x_s \quad \text{és} \quad y = y' + y_s,$$

és innen

$$x^2 = x'^2 + 2x'y_s + x_s^2 \quad \text{és} \quad y^2 = y'^2 + 2y'y_s + y_s^2.$$

A súlyponti x' tengelytől y_s távolságra, egy azzal párhuzamos x tengelyre számított másodrendű nyomaték

$$I_x = \int_{(A)} (y')^2 dA = \int_{(A)} (y' + y_s)^2 dA = \int_{(A)} (y')^2 dA + 2y_s \int_{(A)} y' dA + y_s^2 \int_{(A)} dA = I_{x_s} + y_s^2 A.$$

A képletben szereplő első tag ($\int_{(A)} (y')^2 dA$) a súlyponti tengelyre számított másodrendű nyomaték; a második tag ($2y_s \int_{(A)} y' dA$) a síkidom súlyponti tengelyére számított elsőrendű (statikai) nyomatéka, ami zérus, ezért

$$I_x = I_{x_s} + y_s^2 A.$$

Az összefüggésből látható, hogy az x tengelyre számított másodrendű nyomatékot megkapjuk, ha a vele párhuzamos súlyponti tengelyre (x') számított másodrendű nyomatékhoz hozzáadjuk a tengelyek közti távolság négyzetének és a területnek a szorzatát. Ezt Steiner (1796-1863) tételének nevezzük. Hasonlóképpen igazolható, hogy

$$I_y = I_{y_s} + x_s^2 A.$$

A Steiner-tétel csak olyan párhuzamos tengelyeknél alkalmazható, melyek közül az egyik súlyponti tengely. Az összefüggésekből látható, hogy több párhuzamos tengelyre számított másodrendű nyomaték közül mindig a súlyponti tengelyre számított a legkisebb.

Ha egy keresztmetszetet több egyszerű síkidomra (téglalap, négyzet stb.) bontható, akkor a síkidomoknak egy meghatározott tengelyre számított másodrendű nyomatékát külön-külön kiszámítva és összeadva megkapjuk a keresztmetszet másodrendű nyomatékát. Csak azonos tengelyre számított másodrendű nyomatékokat szabad összeadni. A keresztmetszetben lévő lyuk másodrendű nyomatékát ki kell vonni a teljes (lyukkal együtt számított) keresztmetszet másodrendű nyomatékából. A Steiner-tétel alkalmazható poláris és centrifugális másodrendű nyomatékoknál is.

7.3. Összefüggés a közös kezdőpontú, súlyponti koordinátarendszerekben számított másodrendű nyomatékok között. Tehetetlenségi főtengelek.

A súlyponton átfektetett végtelen sok, egymásra merőleges tengelypárhoz más-más tengelyre ill. tengelypárra számított másodrendű nyomaték tartozik. Közöttük van egy tengelypár (1-es és 2-es jelű), amelyre

- a centrifugális másodrendű nyomaték zérus ($I_{12}=0$),
- a tengelyre számított másodrendű nyomaték az összes súlyponti tengelyek közül az egyikre a legnagyobb (I_1), a másikra pedig a legkisebb (I_2).

Ezeket a súlyponti tengelyeket nevezzük a keresztmetszet *tehetetlenségi főtengeleinek*, a hozzájuk tartozó aequatoriális másodrendű nyomatékokat pedig *főmásodrendű nyomatékoknak*.

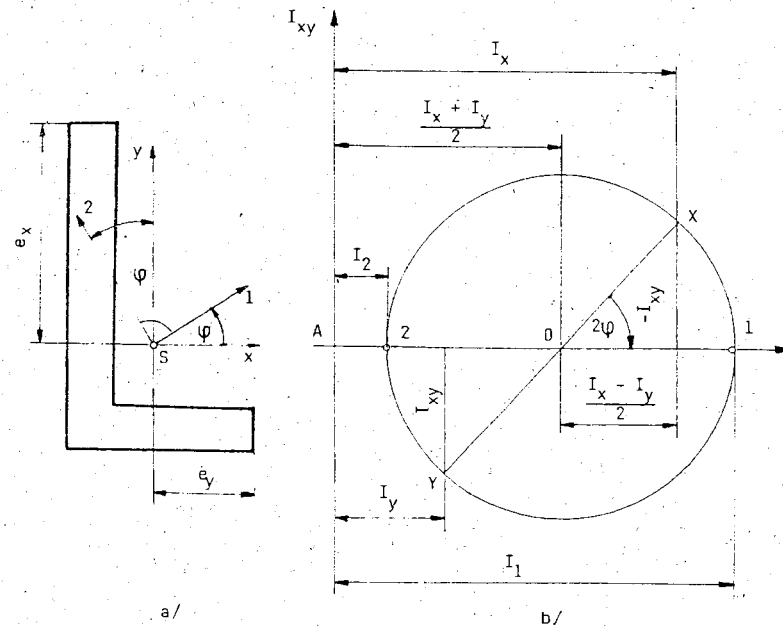
A keresztmetszet minden szimmetriatengelye egyúttal tehetetlenségi főtengele is. Pl. a téglalap főtengelei az oldalakkal párhuzamos súlyponti tengelyek. Ha ismerjük a keresztmetszet valamely súlyponti, egymásra merőleges tengelypárhoz tartozó aequatoriális és centrifugális másodrendű nyomatékokat, akkor ennek segítségével az előbbi tengelypárhoz képest ismert szögben elhelyezkedő másik tengelypárhoz tartozó másodrendű nyomatékokat meghatározhatjuk.

A gyakorlatban a feladat úgy jelentkezik, hogy valamely merőleges tengelypárhoz tartozó másodrendű nyomatékokat (I_x, I_y, I_{xy}) ismerjük és meg kell határozni a tehetetlenségi főtengeleket ill. a főmásodrendű nyomatékokat. E problémát legszemléletesebben az ún. *Mohr-féle tehetetlenségi kör* segítségével oldhatjuk meg. Tételezzük fel, hogy I_x, I_y és I_{xy} -t kiszámítottuk, és $I_x > I_y$, továbbá I_{xy} negatív. Az x és y a keresztmetszet súlyponti tengelyei (107. ábra).

Az x és y tengelyekkel párhuzamosan felvesszünk egy koordinátarendszert, melynek vízszintes tengelyére felmérjük az I_x -et, illetve az I_y -t. (Ezt a tengelyt I -vel jelöljük, az y -nal párhuzamos tengelyt pedig I_{xy} -nal.) Ezután az I_x értékénél ellenkező előjellel felmérjük az I_{xy} -t és megkapjuk a súlyponti x tengelynek megfelelő X pontot, az I_y pontnál pedig az I_{xy} értékét, és megkapjuk az y tengelynek megfelelő Y pontot. Az X és Y pontok összekötése után az O pont körül egy olyan kört rajzolhatunk, amit tehetetlenségi Mohr-körnek nevezünk. Igazolható, hogy a súlyponton átmenő minden egyes tengelyhez tartozó pont ennek a körnek a kerületén helyezkedik el. E kör az I tengelyen kimetszi a tehetetlenségi főtengeleknek megfelelő I_1 és I_2 pontokat ($I_{12}=0$). Amennyiben a Mohr-körön az XI ívhez tartozó középponti szög felét felmérjük a súlyponti x koordinátatengelyhez képest ellentétes forgásértelemben (107a. ábra), akkor megkapjuk az 1-es tehetetlenségi főtengelet, melyre a 2-es főtengele merőleges (az y tengellyel szintén φ szöget zár be).

A léptékhelyes ábra alapján nemcsak lemérhetjük, hanem számíthatjuk is a főmásodrendű nyomatékokat:

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2},$$



107. ábra
A tehetetlenségi Mohr-kör

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.$$

Megfordítva, ha a keresztmetszet főtengelei és főmásodrendű nyomatékai ismertek, a Mohr-féle tehetetlenségi kör segítségével számíthatjuk a főtengelekkel φ szöget bezáró x és y tengelyekre számított másodrendű nyomatékokat is:

$$I_x = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\varphi,$$

$$I_y = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\varphi,$$

ill. előjel nélkül:

$$I_{xy} = \frac{I_1 - I_2}{2} \sin 2\varphi.$$

A továbbiakban rátérünk a tengelyre számított másodrendű nyomatékokból meghatározható keresztmetszeti tényezők értelmezésére.

A keresztmetszeti tényező

Jele: K, mértékegysége: m³, cm³, mm³

A keresztmetszet valamely súlyponti tengelyére számított keresztmetszeti tényezőjét úgy kapjuk, hogyha e tengelyre számított másodrendű nyomatékot osztjuk a szélső szál távolságával (107. ábra). Szélső szálon a súlyponti tengelytől a keresztmetszet legtávolabb levő pontjának távolságát értjük.

Az inerciasugár

A másodrendű nyomatékok jellemzésére gyakran használt mennyiség az inerciasugár. Az A területű síkidom valamely tengelyre számított másodrendű nyomatékát felírhatjuk

$$I_x = i_x^2 A, \quad I_y = i_y^2 A$$

alakban. Az i_x^2 és i_y^2 tényező pozitív gyökét az

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{és} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

mennyiségeket inerciasugárnak nevezzük.

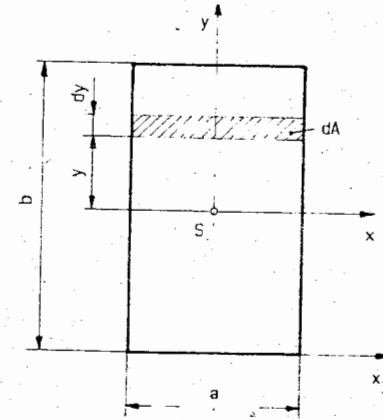
7.4. A másodrendű nyomatékok számítása

A síkidomok másodrendű nyomatékait az eddig megismert összefüggések alapján számíthatjuk. A gyakran előforduló, szabályos síkidomok másodrendű nyomatékát közvetlenül integrálás útján határozzuk meg. A bonyolultabb síkidomokat szabályos részekre (derékszögű négyzet, háromszög, kör, stb.) bontjuk és a részek másodrendű nyomatékait összegezzük a megfelelő szabályok szerint.

A téglalap súlyponti tengelyére számított másodrendű nyomatéka

Az x tengelyre számított másodrendű nyomaték meghatározásához vegyük fel az x tengelytől y távolságra levő dy szélességű területelemet (108. ábra), melyre

$$dA = a dy.$$



108. ábra
Téglalap másodrendű nyomatéka

$$I_x = \int_{(A)} (y)^2 dA = a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{ab^3}{24} - \left(-\frac{ab^3}{24} \right) = \frac{ab^3}{12}$$

Hasonlóképpen az y tengelyre számított másodrendű nyomaték:

$$I_y = \frac{ba^3}{12}$$

A súlyponti tengelyektől a szélső szálak távolsága:

$$e_x = \frac{b}{2} \quad \text{és} \quad e_y = \frac{a}{2}.$$

A keresztmetszeti tényezők:

$$K_x = \frac{I_x}{e_x} = \frac{ab^3}{12} \cdot \frac{2}{b} = \frac{ab^2}{6}; \quad K_y = \frac{ba^3}{6}$$

Az inerciasugarak:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{ab^3}{12ab}} = \frac{b}{\sqrt{12}}; \quad i_y = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

A poláris másodrendű nyomaték:

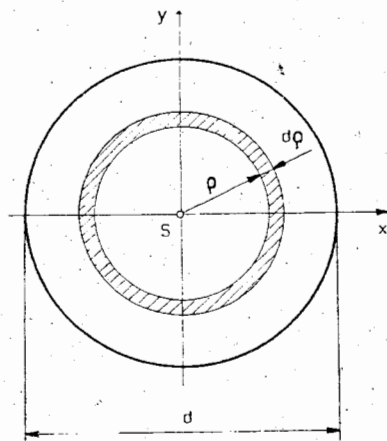
$$I_p = I_x + I_y = \frac{ab^3}{12} + \frac{ba^3}{12} = \frac{ab}{12} (b^2 + a^2).$$

Az x_1 tengelyre átszámított másodrendű nyomaték:

$$I_{x1} = I_x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 A = \frac{ab^3}{12} + \frac{b^2}{4} ab = \frac{ab^3}{3}.$$

Kör

A kör tengelyre számított másodrendű nyomatéka közvetlenül csak nehezen, a poláris másodrendű nyomaték segítségével azonban könnyen számítható. Vegyünk fel az S pontból ρ távolságra egy körgyűrű alakú területelemet (109. ábra):



109. ábra
Körmet szet másodrendű nyomatéka

$$dA = 2\rho\pi d\rho,$$

$$I_p = \int \rho^2 dA = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\frac{d}{2}} = \frac{d^4 \pi}{32}.$$

A szimmetria miatt

$$I_x = I_y,$$

$$I_p = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y = 2I,$$

$$I = I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{d^4 \pi}{64}.$$

A keresztmetszeti tényező:

$$e = \frac{d}{2},$$

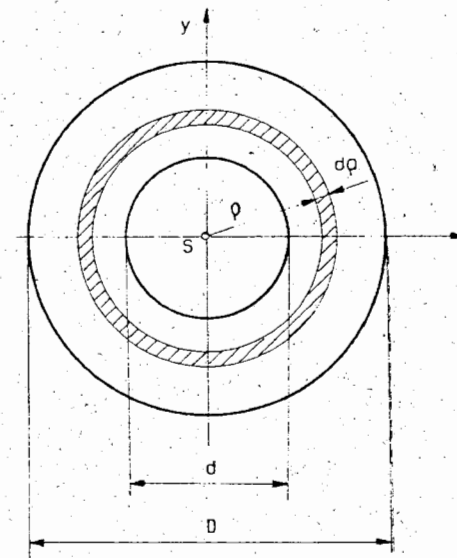
$$K_x = K_y = K = \frac{I}{e} = \frac{d^4 \pi}{64} \frac{2}{d} = \frac{d^3 \pi}{32}.$$

Az inerciasugár

$$i_x = i_y = i = \sqrt{\frac{d^4 \pi}{64 d^2 \pi}} = \frac{d}{4}.$$

D külső és d belső átmérőjű körgyűrű

Számításainkat a kör keresztmetszethez hasonlóan végezzük a 110. ábra alapján.



110. ábra
Kör gyűrű keresztmetszet másodrendű nyomatéka

A poláris másodrendű nyomaték:

$$I_p = \int_{(A)} \rho^2 dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

A tengelyre számított másodrendű nyomaték:

$$I_x = I_y = I = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

A keresztmetszeti tényező:

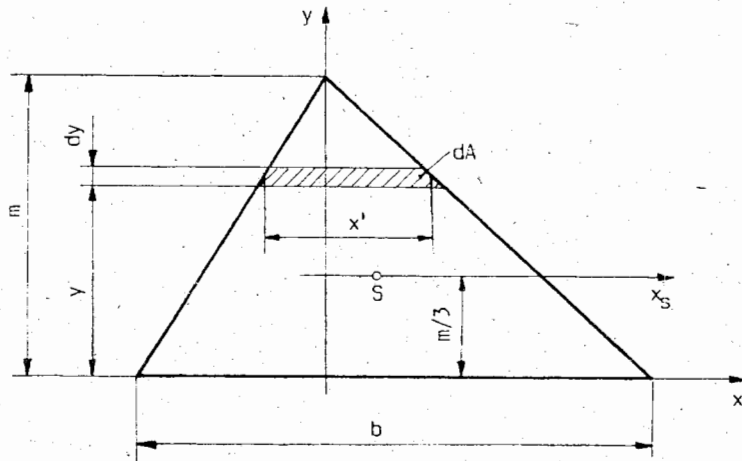
$$K_x = K_y = K = \frac{I}{d} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}$$

Az inerciasugár:

$$i_x = i_y = i = \sqrt{\frac{\pi(D^4 - d^4) \cdot 4}{64(D^2 - d^2) \pi}} = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}$$

A háromszög másodrendű nyomatéka

A háromszög másodrendű nyomatékát a 111. ábra felhasználásával számítjuk.



111. ábra
Háromszög másodrendű nyomatékának számítása

A területelem:

$$dA = x' \cdot dy = \frac{b(m-y)}{m} dy,$$

$$\frac{b}{m} = \frac{x'}{m-y},$$

innen

$$x' = \frac{b(m-y)}{m}$$

Az x tengelyre számított másodrendű nyomaték:

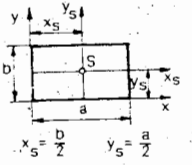
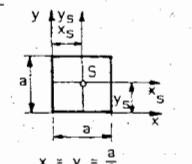
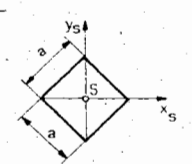
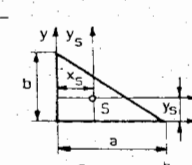
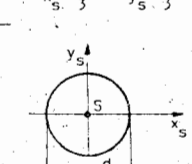
$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_0^m y^2 \frac{m-y}{m} b dy = \int_0^m (by^2 - \frac{b}{m} y^3) dy = \left[b \frac{y^3}{3} - \frac{b}{m} \frac{y^4}{4} \right]_0^m = \frac{bm^3}{3} - \frac{bm^3}{4} = \frac{bm^3}{12}$$

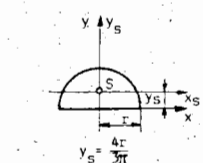
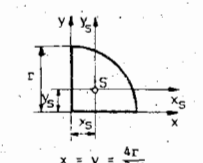
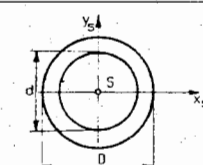
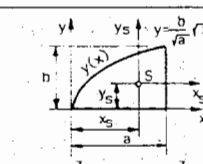
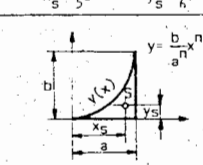
Az x-szel párhuzamos x_s tengelyre számított másodrendű nyomaték:

$$I_{x_s} = I_x - \left(\frac{m}{3}\right)^2 A = \frac{bm^3}{12} - \left(\frac{m}{3}\right)^2 \frac{bm}{2} = \frac{bm^3}{36}$$

A 4. táblázatban néhány nagyon gyakran előforduló síkidom súlyponti x_s , y_s tengelyére, illetve a velük párhuzamos x , y tengelyekre és a tengelypárra számított másodrendű nyomatékát foglaljuk össze.

4. táblázat
Síkidomok másodrendű nyomatékai

Síkidom	Terület	Másodrendű nyomaték		
		x_s-y_s tengelyekre	$x-y$ tengelyekre	x_s-y_s és $x-y$ tengelyekre
	$A = ab$	$I_{x_s} = \frac{ab^3}{12}$ $I_{y_s} = \frac{a^3b}{12}$	$I_x = \frac{ab^3}{3}$ $I_y = \frac{a^3b}{3}$	$I_{x_s, y_s} = 0$ $I_{xy} = \frac{a^2b^2}{4}$
	$A = a^2$	$I_{x_s} = I_{y_s} = \frac{a^4}{12}$	$I_x = I_y = \frac{a^4}{3}$	$I_{x_s, y_s} = 0$ $I_{xy} = \frac{a^4}{4}$
	$A = a^2$	$I_{x_s} = I_{y_s} = \frac{a^4}{12}$		$I_{x_s, y_s} = 0$
	$A = \frac{ab}{2}$	$I_{x_s} = \frac{ab^3}{36}$ $I_{y_s} = \frac{a^3b}{36}$	$I_x = \frac{ab^3}{12}$ $I_y = \frac{a^3b}{12}$	$I_{x_s, y_s} = -\frac{a^2b^2}{72}$ $I_{x, y} = -\frac{a^2b^2}{24}$
	$A = \frac{d^2\pi}{4}$	$I_{x_s} = I_{y_s} = \frac{d^4\pi}{64}$		$I_{x_s, y_s} = 0$

Síkidom	Terület	Másodrendű nyomaték		
		x_s-y_s tengelyekre	$x-y$ tengelyekre	x_s-y_s és $x-y$ tengelyekre
	$A = \frac{r^2\pi}{2}$	$I_{x_s} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)r^4$ $I_{y_s} = \frac{r^4\pi}{8}$	$I_x = I_y = \frac{r^4\pi}{8}$	$I_{x_s, y_s} = I_{xy} = 0$
	$A = \frac{r^2\pi}{4}$	$I_{x_s} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$ $I_{y_s} = I_{x_s}$	$I_x = I_y = \frac{r^4\pi}{16}$	$I_{x_s, y_s} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$ $I_{xy} = \frac{r^4}{8}$
	$A = \frac{D^2 - d^2}{4}\pi$	$I_{x_s} = I_{y_s} = \frac{D^4 - d^4}{64}\pi$		$I_{x_s, y_s} = 0$
	$A = \frac{2}{3}ab$	$I_{x_s} = \frac{19}{480}ab^3$ $I_{y_s} = \frac{8}{175}a^3b$	$I_x = \frac{2}{15}ab^3$ $I_y = \frac{2}{7}a^3b$	$I_{x_s, y_s} = \frac{a^2b^2}{60}$ $I_{xy} = \frac{a^2b^2}{6}$
	$A = \frac{ab}{n+1}$	$I_{x_s} = \frac{ab^3}{12} \cdot \frac{7n^2 + 4n + 1}{(3n+1)(2n+1)^2}$ $I_{y_s} = \frac{a^3b}{(3+n)(2+n)^2}$	$I_x = \frac{ab^3}{3(3n+1)}$ $I_y = \frac{a^3b}{3+n}$	$I_{x_s, y_s} = \frac{a^2b^2}{4(n+1)} \cdot \frac{n}{(n+2)(2n+1)}$ $I_{xy} = \frac{a^2b^2}{4(n+1)}$

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Muttnyánszky Á., Béda Gy., et al.: Statika. Tankönyvkiadó, Bp. 1985
- [2] Silling J.: Műszaki mechanika alapjai I. Kecskemét, 1977.
- [3] Németh F., Pásztor E.: Mechanika I. Statika. Tankönyvkiadó, Bp. 1987.
- [4] Hörömpöly I.: Mechanika I. Statika. Tankönyvkiadó, Bp. 1986.
- [5] Bárczi I.: Szilárdságtan I. Statika. Tankönyvkiadó, Bp. 1985.
- [6] Kósa Cs., Gyurkóvics L.-né, et al.: Nyugvó rendszerek mechanikája (Műszaki mechanika I.) Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1985.
- [7] Kerek A., Koppány I.: Tartószerkezetek I. Tankönyvkiadó, Bp. 1978.
- [8] Szilárdságtan I. (NME Mechanikai Tanszék Munkaközössége) Tankönyvkiadó, Bp. 1985.
- [9] Kósa Cs.: A szilárdságtani méretezés alapjai. Tankönyvkiadó, Bp. 1987.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Alapfogalmak, alaptételek	5
1.1. Az erő fogalma, ábrázolása	5
1.2. A statika alaptételei	8
1.2.1. Első alaptétel	8
1.2.2. Második alaptétel	8
1.2.3. Harmadik alaptétel	9
1.2.4. Negyedik alaptétel	10
1.3. Kényszerek, megtámasztási módok	11
1.4. Közös ponton átmenő síkbeli erők	13
1.4.1. Az erő komponensekre bontása szerkesztéssel	13
1.4.2. Három erő egyensúlya	14
1.5. Az erőrendszer egyensúlyának feltételei	16
1.6. Az erő statikai nyomatéka	17
1.7. Az erőegyensúly feltétele nyomatéki tétellel	19
2. Párhuzamos síkbeli erőrendszer	21
2.1. Két párhuzamos hatásvonalú, megegyező értelmű erő eredője	22
2.2. Az erőpár	24
2.3. Az erő és erőpár összetétele	27
3. Általános síkbeli erőrendszer	28
3.1. Az eredő meghatározása közvetlen erőösszetétellel	28
3.2. Szerkesztés segéderőkkel	30
3.3. Szerkesztés kötélsokszöggel	31
3.4. A síkbeli általános erőrendszer eredőjének meghatározása számítással	34
3.5. Az erőrendszer pontra redukálása	36
3.6. Síkbeli erőrendszerek különböző eseteinek vizsgálata	37
3.7. Síkbeli erők felbontása három komponensre	38

4. Síkbeli tartók	41
4.1. Alapfogalmak	41
4.2. A statikai határozottság	44
4.3. Az igénybevétel fogalma	45
4.4. A folytonosan megoszló síkbeli erőrendszer	50
4.5. Kéttámaszú tartók igénybevételi ábrái	53
4.5.1. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartók	54
4.5.2. Koncentrált erővel terhelt konzolos tartó	58
4.5.3. Egyenletesen megoszló terhelésű tartó	60
4.5.4. Vegyes terhelésű tartó	64
4.6. Összefüggések a tartó igénybevételi függvényei között	66
4.7. Befogott tartók igénybevételi ábrái	68
4.7.1. Koncentrált erővel terhelt befogott tartó	69
4.7.2. Egyenletesen megoszló terhelésű befogott tartó	70
4.8. Az igénybevételi ábrák szerkesztése a szuperpozíció elve alapján	72
4.9. Törtvonalú tartók igénybevétele	72
4.10. A csuklós többtámaszú tartó (Gerber-tartó)	79
4.11. A háromcsuklós szerkezet	82
4.12. Síkbeli rácsos tartók	85
4.12.1. A rúderők meghatározása csomóponti módszerrel	87
4.12.2. A rúderők meghatározása átmetsző módszerrel	91
5. A súrlódás	95
5.1. Alapfogalmak	95
5.2. Egyensúly súrlódással	98
5.3. A súrlódás elvén működő egyszerű gépek	101
5.4. A kötél súrlódás	108
5.4.1. A kötél súrlódás differenciálegyenlete	108
5.4.2. A szalagfék	109
5.5. A gördülési ellenállás	111
6. A súlypont	113
6.1. A súlypont fogalma	113
6.2. A súlyponti koordináták számítása	113
6.3. Vonalak súlypontja	115
6.4. Síkidomok súlypontja	117

6.4.1. A síkidomok súlypontjának meghatározása a statikai nyomaték segítségével	119
6.4.2. Síkidomok súlypontjának szerkesztése	123
6.5. Testek súlypontja	125
7. Síkidomok másodrendű nyomatékai	127
7.1. A másodrendű nyomatékok értelmezése	127
7.2. Összefüggés párhuzamos tengelyekre számított másodrendű nyomatékok között. A Steiner-tétel.	128
7.3. Összefüggés a közös kezdőpontú, súlyponti koordináta-rendszerekben számított másodrendű nyomatékok között. Tehetetlenségi főtengelyek	130
7.4. A másodrendű nyomatékok számítása	132
Irodalomjegyzék	140