

Az impulzus-tétel:  $\frac{d(m \cdot v)}{dt}$

stationárius (kvázi-stacionárius) sűrűségű és összehangolt közegnél alkalmazható.

$$\int_A \underbrace{\vec{v} g(\vec{v} \cdot d\vec{A})}_{dm} = \int_V g \cdot \vec{g} dV - \int_A p d\vec{A} + \int_A d\vec{F}_S + \vec{F}_R \quad \boxed{\sum \vec{j} = \sum \vec{F}}$$

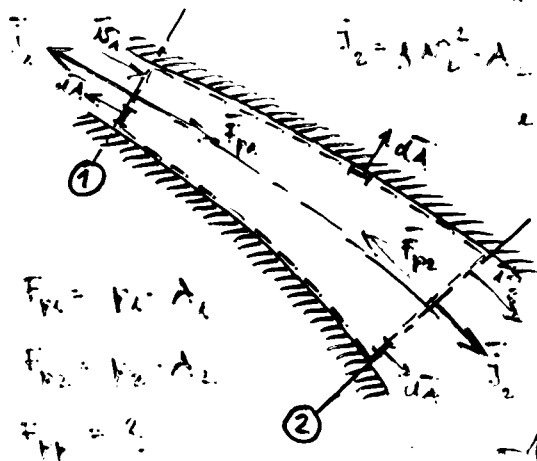
- 1,  $\vec{v} g(\vec{v} \cdot d\vec{A})$  elemi impulzusvektor mindig kifelé mutat
- 2, ha  $\vec{v} = \dot{u}$ , és  $\vec{v} \parallel d\vec{A} \rightarrow |j_{ki}| = g v_{ki}^2 A_{ki}, |j_{be}| = g v_{be}^2 A_{be}$
- 3,  $g \vec{g} dV$  - elemi súlyerő,  $\vec{g}$  lehet egyélt töltetlenségi erő is.
- 4,  $-\int_A p d\vec{A}$  - zárt ellenőrs felületre ható nyomóerők eredője
- 5,  $\int_A d\vec{F}_S$  - ellenőrs felület mentén ábrázolt sűrűségi erőkh eredője
- 6,  $\vec{F}_R$  - az ellenőrs felületen belüli súrlódás hatását az áramló közegre kifejtett erő.

Alkalmazási területek, ellenőrs felület tetraédros felvétel  
 Milyen erő hat a határoló falra, állandó sűrűségű, ideális közeg áramlásakor?

$j_1 = g v_1^2 A_1$  áramlás vízszintes síkban:  $\int_V g \vec{g} dV = \vec{0}$

$j_2 = g v_2^2 A_2$  ideális közeg:  $\int_A d\vec{F}_S = \vec{0}$

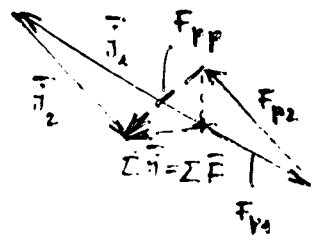
ell. felületen belüli súrlódás hatását:  $\vec{F}_R = \vec{0}$



$F_{p1} = p_1 \cdot A_1$

$F_{p2} = p_2 \cdot A_2$

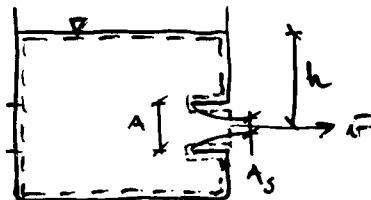
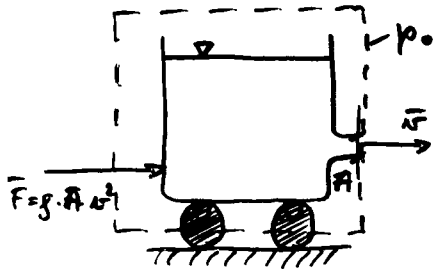
$F_{pp} = ?$



$\vec{F}_{R1} = -\vec{F}_{p2}$

Az impulzustétel alkalmazása:

- 1, csőidomra ható erő (ív, köngyök, konfiter)
- 2, kifolyó sugár reakciója, Borda-féle kifolyónyelcs.



folgyadékra:  $F = A \cdot g \cdot h$

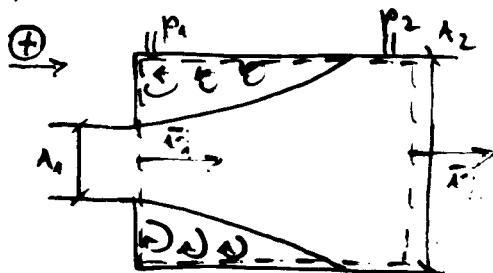
$|j_{ki}| = g \cdot A_s \cdot v^2 = g \cdot A_s \cdot (2gh)$  (B.c.)

impulzus-tétel:

$A \cdot g \cdot h = g \cdot A_s \cdot 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow \alpha = \frac{A_s}{A} = \frac{1}{2}$

Kontrakciós tényező:  $\alpha = 0,5 \dots 1,0$

- 3, Borda - Carnot féle veszteség:



imp. t. :  $-g A_1 v_1^2 + g A_2 v_2^2 = p_1 A_2 - p_2 A_1$

folgy. t. :  $A_1 v_1 = A_2 v_2$

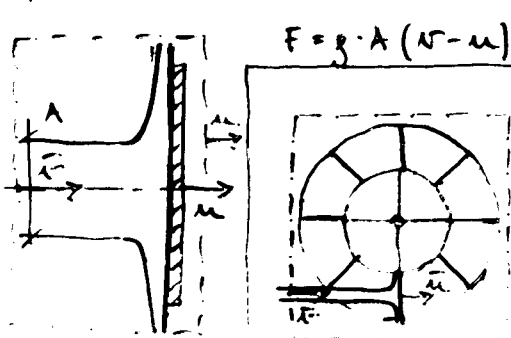
$p_2 - p_1 = g v_2 (v_1 - v_2)$

B. c. :  $(p_2 - p_1)_{id} = \frac{g}{2} (v_1^2 - v_2^2)$

$\Delta p_{B-C} = (p_2 - p_1)_{id} - (p_2 - p_1) = \frac{g}{2} (v_1^2 - v_2^2 - 2v_1 v_2 + 2v_2^2)$

$\Delta p_{B-C} = \frac{g}{2} (v_1 - v_2)^2$

- 4, szabad sugár eltérítésekor keletkező erő



$F = g \cdot A (v-u)^2$  | Szabad sugárú turbina:

Kvázi stat. jelenség  $\rightarrow$  álló ell. felület.

$\dot{m} = g \cdot A \cdot v$  :  $F = g \cdot A \cdot v (v-u)$

Pelton turbina  $\rightarrow$  álló lapátnál:

$F = 2 \cdot g \cdot A \cdot v^2$

## Áramlások hasonlósága

térerő (G), nyomásból származó erő (P), sűrűdésből származó erő (S), tehetetlenségi erő (T)

1. térerő  $\gamma$  nagyságú folyadékterfogetra:  $G = \gamma \cdot g$   
tehetetlenségi erő:  $T = \gamma \cdot a \sim \gamma \frac{v^2}{l}$

$$\frac{T}{G} = \frac{\gamma \cdot \frac{v^2}{l}}{\gamma \cdot g} = \frac{v^2}{l \cdot g}; \text{ Froude-szám: } \boxed{Fr = \frac{v}{\sqrt{l \cdot g}}}$$

2. sűrűdési erő  $\eta$  nagyságú folyadékterfogetra:

$$S_x = \eta \Delta v_x = \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \sim \eta \frac{v}{l^2}$$

$$\frac{T}{S} = \frac{\gamma \cdot \frac{v^2}{l}}{\eta \frac{v}{l^2}} = \frac{\gamma \cdot v \cdot l}{\eta} = \frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{v \cdot l}{\nu}$$

Reynolds - szám:  $\boxed{Re = \frac{l \cdot v}{\nu}}$

$$Eu = \frac{\Delta p}{\gamma \cdot v^2} \quad Pr = \frac{\nu}{a} \quad \left( a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \right) \quad Pe = Re \cdot Pr = \frac{l \cdot v}{a}$$

$$\boxed{Ar = \frac{\text{felhajtóerő}}{\text{tehetetlenségi e.}} = \frac{\gamma \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot l}{v^2}}$$

4 független változóból 3 tetszőlegesen választható:

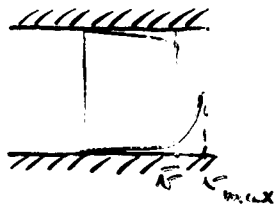
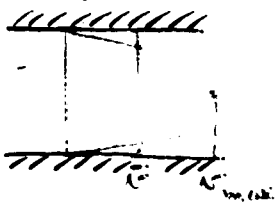
$$C_\beta = 1; \quad C_l = \frac{l_0}{l_M} = 3; \quad C_{\Delta T} = \frac{\Delta T_0}{\Delta T_M} = 1$$

$$Ar = \text{konst.} \Rightarrow C_{Ar} = \frac{Ar_0}{Ar_M} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot \beta \cdot \Delta T_0 \cdot l_0}{\gamma \cdot \beta \cdot \Delta T_M \cdot l_M}} = \sqrt{\frac{l_0}{l_M}}$$

Áramlási sebesség

Lamináris és turbulens áramlás csöben

Reynolds kritikus  
sebességprofil:



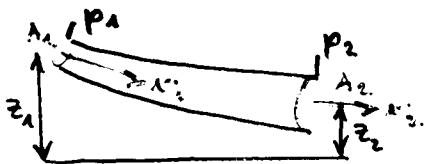
$$Re = \frac{\bar{v} \cdot d}{\nu}$$

$$\bar{v} = \frac{\dot{V}}{A}$$

$$Re_{krit} = 2320$$

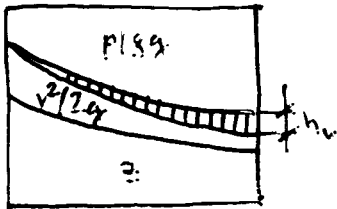
Áramlás zárt csővezetékben

1. A súrlódásos közegre érvényes Bernoulli egyenlet.

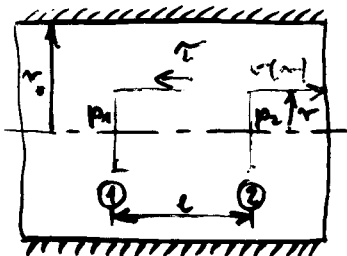


$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{\Delta p_{vesz}}{\rho g}$$

||  
vesztésmagasság : h<sub>v</sub>



2. Nyomásvettség kör km-ű egyenes csőben lamináris áramlásnál



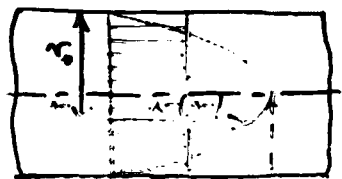
$\tau = -\eta \frac{dv}{dr}$ ; vízszintes cső, stat. ár.  
s = all.  $\rightarrow F(p)$  és  $S$

$$(p_1 - p_2) r^2 \pi; 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \tau = -2\pi \cdot r \cdot l \cdot \eta \frac{dv}{dr}$$

$$(p_1 - p_2) r^2 \pi = -2\pi \cdot r \cdot l \cdot \eta \frac{dv}{dr}$$

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta \cdot l} \cdot r \cdot dr$$

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta \cdot l} \cdot \frac{r^2}{2} + C; r = r_0 \rightarrow v = 0 \quad C = \frac{p_1 - p_2 \cdot r_0^2}{4\eta \cdot l}$$



$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{max} \quad v_{max} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta \cdot l} (r_0^2 - r^2)$$

$r=0 \rightarrow v = v_{max} = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot r_0^2$  Hagen-Poiseuille törvény:

$\dot{V} = A \cdot \bar{v} = r_0^2 \pi \cdot \frac{p_1 - p_2}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot r_0^2 \Rightarrow \dot{V} = \frac{r_0^4 \cdot \pi \cdot (p_1 - p_2)}{8 \cdot \eta \cdot l}$

csősurlóságs leküzdéséhez:  $p_1 - p_2 = \frac{8 \cdot \eta \cdot l \cdot \dot{V}}{r_0^4 \cdot \pi}$

$r_0^4 = \frac{d^4}{16}$ ;  $\eta = \frac{\rho \cdot \nu}{2}$   $\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{128 \cdot \rho \cdot \nu \cdot l \cdot \dot{V}}{d^4 \cdot \pi}$

$\dot{V} = \bar{v} \frac{d^2 \pi}{4} \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{128 \cdot \rho \cdot \nu \cdot l \cdot \bar{v} \cdot d^2 \cdot \pi}{4 \cdot d^4 \cdot \pi}$

$p_1 - p_2 = \frac{64 \cdot l \cdot \rho}{2 \cdot d} \cdot \frac{\nu}{d} \cdot \bar{v} = 64 \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \bar{v}^2 \left( \frac{\nu}{d \cdot \bar{v}} = \frac{1}{Re} \right)$

$p_1 - p_2 = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \bar{v}^2$   $gh_v = \frac{p_1 - p_2}{\rho} \Rightarrow h_v = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g}$

csősurlósági tényező:  $\lambda = \frac{64}{Re}$  Lamináris áramlásra.

3, nyomásvesztés kör km-ű egyenes csőben turb. áramlásnál sebességeloszlás;  $\bar{v} \approx 0,8 - 0,88 v_{max}$ ; lamináris határérték

$\Delta p_v = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \bar{v}^2$  Blasius képlet:  $\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt{Re}}$

hidraulikailag sima csőre;  $Re < 10^5$

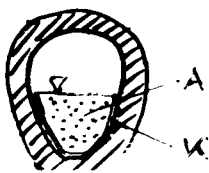
4, nem kör keresztmetsű csőre

$\Delta p_v = \lambda \cdot \frac{l}{d_e} \cdot \frac{\rho}{2} \bar{v}^2$    $\tau \cdot K \cdot l = A (p_1 - p_2)$   
 $p_1 - p_2 = \frac{\tau \cdot K \cdot l}{A}$

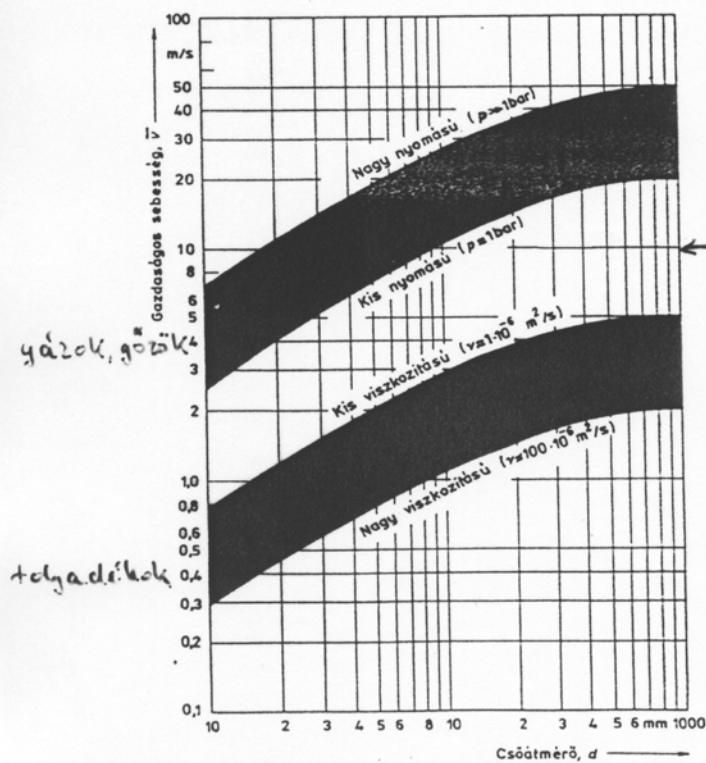
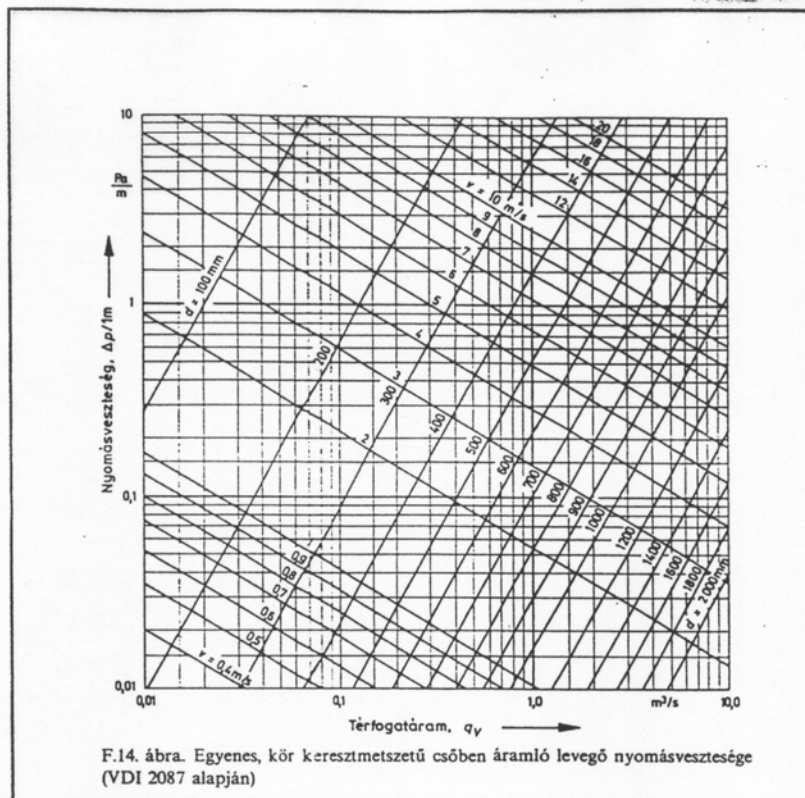
$\tau \cdot d_e \cdot \pi \cdot l = \frac{d_e^2 \pi}{4} (p_1 - p_2) \rightarrow p_1 - p_2 = \frac{4 \cdot l}{d_e} \cdot \tau$

$(p_1 - p_2)$  értékek egyenlők  $\Rightarrow \frac{\tau \cdot K \cdot l}{A} = \frac{4 \cdot l}{d_e} \cdot \tau$

egyenértékű átmérő:  $d_e = \frac{4A}{K}$   $\rightarrow$  nevezetét kiemelve

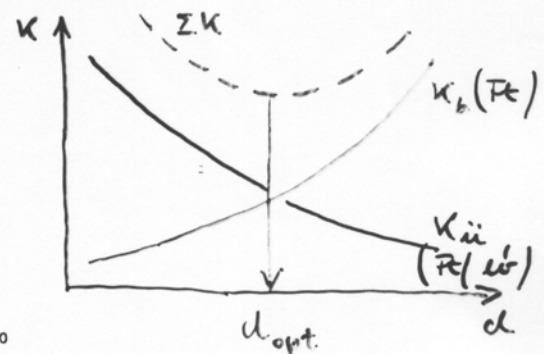


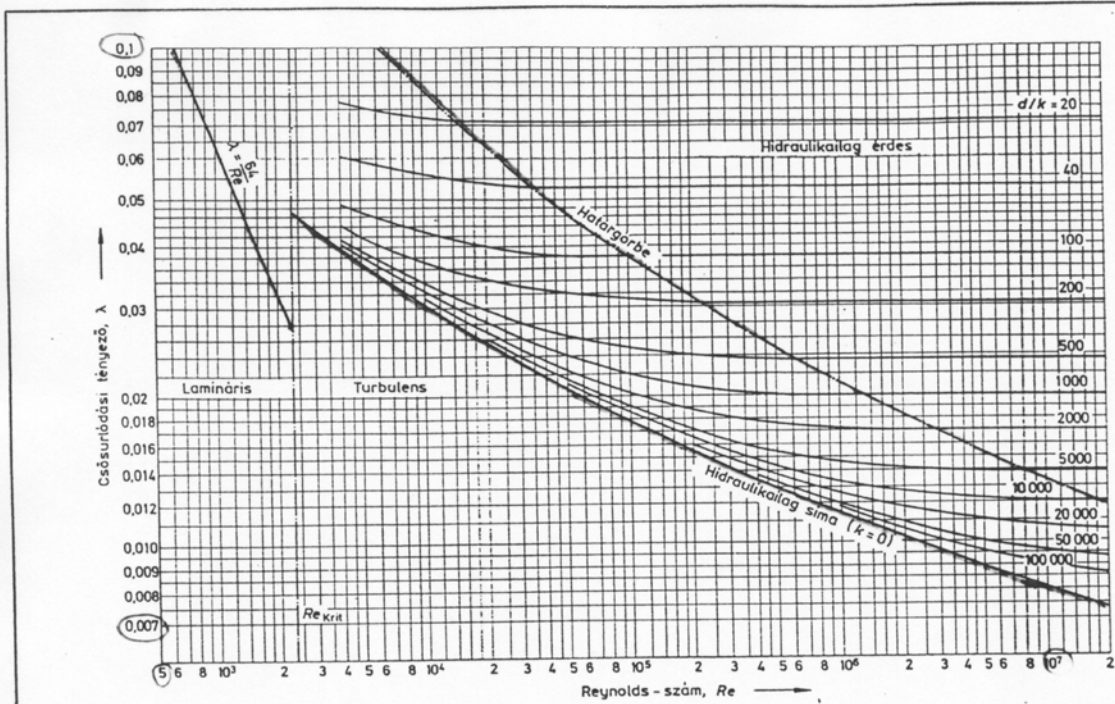
A és K értelmezése, ha az áramló közeg a keresztmetszetünk részben tölti ki:  $\frac{a}{b} = 1/3$



csővezetékek tervezésének szempontjai:

- 1, Kis nyomásvesztés (alacsony üzemeltetési költség)
- 2, megfelelő áramlási sebesség
- 3, Kis csőátmérő (alacsony beruházási költség.)





F.12. ábra. Csőszűrődési tényező a Reynolds-szám függvényében

4.4. táblázat. A λ csőszűrődési tényező értékei turbulens áramlásnál  $(Re = \frac{\bar{v}d}{\nu} > 2320)$

Hidraulikailag sima cső	Hidraulikailag érdes cső	Az átmeneti tartományban
$k \ll \delta_1$	$k > \delta_1/4$	$k \leq \delta_1/4$
L. az F.12. ábrát is	L. az F.12. ábrát is	L. az F.12. ábrát is
<p>A λ képletei:</p> <p>a) Blasius képlete <math>2320 &lt; Re &lt; 10^5</math> tartományra:</p> $\lambda = 0,3164 Re^{-0,25} \quad (4.58)$ <p>b) Nikuradse képlete:</p> <p><math>10^5 &lt; Re &lt; 5 \cdot 10^6</math> tartományra:</p> $\lambda = 0,032 + 0,221 Re^{-0,237} \quad (4.59)$ <p>c) A Prandtl-Kármán-képlet:</p> <p><math>Re &gt; 10^6</math> tartományra:</p> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(Re \sqrt{\lambda} - 0,8) \quad (4.60)$	<p>A λ képletei:</p> <p>a) Nikuradse képlete:</p> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{d}{k} + 1,14 \quad (4.61)$ <p>b) Moody képlete:</p> $\lambda = 0,0055 + 0,15 \left(\frac{k}{d}\right)^{1/3} \quad (4.62)$	<p>A λ képletei:</p> <p>A Prandtl-Colebrook-képlet:</p> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left[ \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{d} \cdot 0,269 \right] \quad (4.63)$ <p><i>Handwritten note:</i> <math>\sqrt{\lambda} = \frac{34,2}{(0,5 \cdot Re)^{0,875}} \cdot d</math></p>